情報論理学 2016 年第 9 週分ハンドアウト

担当：松田一孝

前のつづき　明示的に書き忘れたが，述語論理でも以下が成り立つ．

定理 6.1. 以下が成り立つ．

- $\Gamma, A \models B$ ならば，そのときに限り $\Gamma \models A \Rightarrow B$.
- $\Gamma, A \models B$ かつ $\Delta \models A$ ならば $\Gamma, \Delta \models B$.
- $\Gamma \models B$ ならば，$\Gamma, A \models B$.
- $\Gamma, A, B, \Delta \models C$ ならば $\Gamma, B, A, \Delta \models C$.
- $\Gamma, A, A \models B$ ならば $\Gamma, A \models B$. □

これまで，$\forall x.P(x) \Rightarrow Q(x)$ といった $\forall x.A$ の形の論理式の「使い方」を学んだ．しかしながら，それのみでは $(\forall x.P(x)) \wedge (\forall y.P(y) \Rightarrow Q(y)) \Rightarrow (\forall z.Q(z))$ といった論理式の妥当性を同値変形により示すのはまだ不十分である．

以下の定理は上記のような論理式の妥当性を示すのに有用だろう．

定理 6.2. A を論理式，Γ を論理式の列とし，x を $x \notin \mathrm{FV}(\Gamma)$ である変数とする．このとき，$\Gamma \models A$ ならば，そのときに限り $\Gamma \models \forall x.A$ である．

証明. **（ならば）**任意の M, θ について，$M, \theta \models \Gamma$ であったならば $M, \theta \models A$ が言えたとしよう．ここで，$x \notin \mathrm{FV}(\Gamma)$ なので，$M = (D, I)$ とすると，任意の $d \in D$ について，$M, \theta[x \mapsto d] \models \Gamma$ が言える．よって $M, \theta[x \mapsto d] \models A$ である．なので，任意の M, θ について，$M, \theta \models \Gamma$ ならば $M, \theta[x \mapsto d] \models A$ が言える．よって，$\Gamma \models \forall x.A$ である．

（なぜならば） 任意の項 t について $(\forall x.A) \Rightarrow A[t/x]$ は妥当である．なので，$\models (\forall x.A) \Rightarrow A$ である．よって，$\Gamma \models (\forall x.A) \Rightarrow A$ および $\Gamma, (\forall x.A) \models A$ が言えるため，$\Gamma \models \forall x.A$ から $\Gamma \models A$ が言える． □

ここで $x \in \mathrm{FV}(A)$ の場合は，$\forall x.A$ と A は論理的同値でないかもしれないことを思いだしてほしい（たとえば，$P(x)$ と $\forall x.P(x)$．$P(x) \Rightarrow P(c)$ は妥当でないが，$(\forall x.P(x)) \Rightarrow P(c)$ は妥当）．注意すべきなのは，$x \in \mathrm{FV}(A)$ であっても，A が**妥当であれば**，$\forall x.A$ も妥当であることが言えるという点である．

前述の式であるが，変形により $((\forall x.P(x)) \wedge (\forall y.P(y) \Rightarrow Q(y)) \Rightarrow Q(z)) \equiv \top$ は言える．あとは上記定理を使い $(\forall z.(\forall x.P(x)) \wedge (\forall y.P(y) \Rightarrow Q(y)) \Rightarrow Q(z)) \equiv \top$ を得て，後述の $\forall$ に関する変形規則を用いて $(\forall z.(\forall x.P(x)) \wedge (\forall y.P(y) \Rightarrow Q(y)) \Rightarrow Q(z)) \equiv (\forall x.P(x)) \wedge (\forall y.P(y) \Rightarrow Q(y)) \Rightarrow \forall z.Q(z) \equiv \top$ を言えばよい．

また，同様に以下も言える．

定理 6.3. A，B を論理式，Γ を論理式の列とし，x を $x \notin \mathrm{FV}(\Gamma) \cup \mathrm{FV}(B)$ である変数とする．このとき，$\Gamma, (\exists x.A) \models B$ ならば，そのときに限り $\Gamma, A \models B$ である． □

7　述語論理式の同値変形

まず，命題論理における同値変形規則は述語論理式においても正しい．このことは，直感的には $[\![\neg A]\!]_{M,\theta}$，$[\![A \wedge B]\!]_{M,\theta}$ 等が部分式の解釈 $[\![A]\!]_{M,\theta}$ や $[\![B]\!]_{M,\theta}$ かどう計算されるかは述語論理でも命題論理でも同じであるためである．よって，ここでは述語論理特有の同値な式のみを紹介する．

まず，de Morgan の法則である．

$$\neg(\forall x.A) \equiv \exists x.\neg A \qquad \neg(\exists x.A) \equiv \forall x.\neg A \qquad \text{(de Morgan の法則)}$$

また，$\forall$ は $\wedge$ に，$\exists$ は $\vee$ に対し分配する．

$$\forall x.(A \wedge B) \equiv (\forall x.A) \wedge (\forall x.B)$$
$$\exists x.(A \vee B) \equiv (\exists x.A) \vee (\exists x.B)$$

しかしながら，$\forall x.(A \vee B)$ と $(\forall x.A) \vee (\forall x.B)$ だと前者が後者の論理的帰結であり，$\exists x.(A \wedge B)$ と $(\exists x.A) \wedge (\exists x.B)$ だと後者が前者の論理的帰結である [1]．

$$(\forall x.A) \vee (\forall x.B) \Rightarrow \forall x.(A \vee B) \equiv \top$$
$$(\exists x.A \wedge B) \Rightarrow (\exists x.A) \wedge (\exists x.B) \equiv \top$$

$\forall$ 同士，$\exists$ 同士の順番は交換可能である．

$$\forall x.\forall y.A \equiv \forall y.\forall x.A \qquad \exists x.\exists y.A \equiv \exists y.\exists x.A$$

議論領域が非空であったことを思いだしてほしい．そのため以下が成り立つ．

$$(\forall x.A) \Rightarrow (\exists x.A) \equiv \top$$

また，以下も言える．直感的には，前者は x が与えられる前に y を選ばなければいけないのに対し，後者は x が与えられた後にそれに応じて y を選べばよいためである [2]．

$$(\exists y.\forall x.A) \Rightarrow (\forall x.\exists y.A) \equiv \top$$

量化子は「関係のない部分」，つまりそれが束縛する変数を自由変数として含まない式，を無視して移動することができる．たとえば，$x \notin \mathrm{FV}(B)$ であるときに以下が言える．

$$\begin{aligned}
\forall x.A \wedge B &\equiv (\forall x.A) \wedge B & \exists x.A \wedge B &\equiv (\exists x.A) \wedge B \\
\forall x.A \vee B &\equiv (\forall x.A) \vee B & \exists x.A \vee B &\equiv (\exists x.A) \vee B \\
\forall x.B \Rightarrow A &\equiv B \Rightarrow \forall x.A & \exists x.B \Rightarrow A &\equiv B \Rightarrow \exists x.B \\
\forall x.A \Rightarrow B &\equiv (\exists x.A) \Rightarrow B & \exists x.A \Rightarrow B &\equiv (\forall x.A) \Rightarrow B
\end{aligned}$$

最後の行の二つの式には注意する．これらは $A \Rightarrow B$ が $\neg A \vee B$ であることに注意すれば

$$\begin{aligned}
\forall x.A \Rightarrow B \equiv &\{\text{ 含意の法則 }\} \\
& \forall x.\neg A \vee B \\
\equiv &\{\forall \text{ の移動．今 } x \notin \mathrm{FV}(B) \text{ である }\} \\
& (\forall x.\neg A) \vee B \\
\equiv &\{\text{de Morgan の法則 }\} \\
& \neg(\exists x.A) \vee B \\
\equiv &\{\text{ 含意の法則 }\} \\
& (\exists x.A) \Rightarrow B
\end{aligned}$$

[1] $A \models B$ であるとき，A が B よりも**強い**（あるいは B が A より**弱い**）と言うことがある．

[2] $\forall x.A$ は「どんな個体が x として**与えられても** A が言える」ということ，$\exists x.A$ は「適切な個体を x として**選べば** A が言える」ということを表しているとも理解できる．

のようにして示せる．また，$\forall x.P(x) \Rightarrow Q$ と $(\forall x.P(x)) \Rightarrow Q$ は意味が異なることに注意し，括弧のつけ方には細心の注意を払おう．

また，$x \notin \mathrm{FV}(B)$ であれば，以下が言える．

$$\forall x.B \equiv \exists x.B \equiv B$$

前回述べたように，任意の項 t について以下が成り立つ．

$$(\forall x.A) \Rightarrow A[t/x] \equiv \top \qquad A[t/x] \Rightarrow (\exists x.A) \equiv \top$$

最後に，今回の冒頭のような議論を同値式としてまとめておく．

$$(\forall x.A \Rightarrow B) \Rightarrow (\forall x.A) \Rightarrow (\forall x.B) \equiv \top$$
$$(\forall x.A \Rightarrow B) \Rightarrow (\exists x.A) \Rightarrow (\exists x.B) \equiv \top$$

例 7.1. たとえば，$\exists x.(A \Rightarrow B) \equiv (\forall x.A) \Rightarrow (\exists x.B)$ は以下のようにして示される．

$$\begin{aligned}
\exists x.(A \Rightarrow B) &\equiv \{\text{ 含意の法則 }\}\\
&\quad \exists x.(\neg A \vee B)\\
&\equiv \{\text{ 存在と選言 }\}\\
&\quad (\exists x.\neg A) \vee (\exists x.B)\\
&\equiv \{\text{de Morgan の法則 }\}\\
&\quad \neg(\forall x.A) \vee (\exists x.B)\\
&\equiv \{\text{ 含意の法則 }\}\\
&\quad (\forall x.A) \Rightarrow (\exists x.B)
\end{aligned}$$

□

練習問題 7.1. 以下を同値変形により示せ．

$$\forall x.(P \wedge Q(x)) \equiv P \wedge \forall x.Q(x) \qquad \forall x.(P(x) \Rightarrow Q) \equiv (\exists x.P(x)) \Rightarrow Q$$
$$\exists x.\exists y.(P(x) \wedge Q(y)) \equiv (\exists x.P(x)) \wedge (\exists x.Q(x))$$

□

例 7.2 (Drinker paradox)**.** 以下の表明を考える．

> どこの居酒屋にも，その人が日本酒を飲んでいれば他の人もみな日本酒を飲んでいるという人がいる．

今，居酒屋の席数が高々有限であることは無視する．また，居酒屋には人が一人はいることにする（客はいない居酒屋はあっても，店員がいない居酒屋は居酒屋と言えないだろう）．

さて，この表明を「どこの居酒屋」の部分を議論領域の選択の任意性に押しつけてしまって，$P(x)$ を「x が日本酒を飲んでいる」という述語とおき，論理式で表すと

$$\exists x.\, P(x) \Rightarrow \forall y.P(y)$$

となる．実はこの論理式は恒真である．

この論理式の妥当性を解釈の定義に従って確認するのは容易い．構造 $M = (D, I)$ において，任意の d について $I(P)(d) = \mathrm{T}$ かどうかで場合分けする．

- 任意の d について $I(P)(d) = \mathrm{T}$ となる場合, どのような $d \in D$ を選んでも $[\![\forall y.P(y)]\!]_{M,\theta[x=d]} = \mathrm{T}$ となるので，$[\![P(x) \Rightarrow \forall y.P(y)]\!]_{M,\theta[x=d]} = \mathrm{T}$ となり，$[\![\exists x.\, P(x) \Rightarrow \forall y.P(y)]\!]_{M,\theta} = \mathrm{T}$ となる．
- ある d については $I(P)(d) = \mathrm{F}$ となる場合, $[\![P(x)]\!]_{M,\theta[x=d]} = \mathrm{F}$ となり, $[\![P(x) \Rightarrow \forall y.P(y)]\!]_{M,\theta[x=d]} = \mathrm{T}$ となるため，$[\![\exists x.\, P(x) \Rightarrow \forall y.P(y)]\!]_{M,\theta} = \mathrm{T}$ となる．

さて，これを同値変形で示してみよう．

$$
\begin{aligned}
\exists x.\, P(x) \Rightarrow \forall y.P(y) &\equiv \{\text{ 含意の法則 }\} \\
&\quad \exists x.\, \neg P(x) \vee (\forall y.P(y)) \\
&\equiv \{\exists\text{ の移動 }\} \\
&\quad (\exists x.\neg P(x)) \vee (\forall y.P(y)) \\
&\equiv \{\text{de Morgan の法則 }\} \\
&\quad \neg(\forall x.P(x)) \vee (\forall y.P(y)) \\
&= \{\text{ 束縛変数の名前換え：この講義では同じ論理式だと扱う }\} \\
&\quad \neg(\forall x.P(x)) \vee (\forall x.P(x)) \\
&\equiv \{\text{ 排中律 }\} \\
&\quad \top
\end{aligned}
$$

この命題は直観主義述語論理（そこでは $A \Rightarrow B$ と $\neg A \vee B$ は後者のほうが強い）では証明できないことが知られている． $\square$

例 7.3 (Barbar paradox)**.** 次の表明を考えてみよう．

> ある町の床屋は，自分自身で髭を剃らない人全ての人の髭を剃り，それ以外の人の髭を剃らない．

このようなことは有り得るだろうか？

まず，この命題を論理式で表してみよう．c を床屋という定数，$S(x, y)$ を「x は y の髭を剃る」という述語であるとすると，上記の論理式は，それを A と置くと

$$A = (\forall x.\neg S(x, x) \Rightarrow S(c, x)) \wedge (\forall x.S(c, x) \Rightarrow \neg S(x, x))$$

となる．これが恒偽かどうかが問われていることとなる．ところで，$\models A \Rightarrow B$ と $B \equiv \bot$ が言えれば，$\models \neg A$（つまり，A は恒偽）が言える．このこと自体は以下の同値変形により確認できる．

$$
\begin{aligned}
\neg A &\equiv \{\bot \text{ は } \vee \text{ の単位元 }\} \\
&\quad \neg A \vee \bot \\
&\equiv \{\text{ 含意の法則 }\} \\
&\quad A \Rightarrow \bot \\
&\equiv \{B \equiv \bot\} \\
&\quad A \Rightarrow B \\
&\equiv \{A \Rightarrow B \equiv \top\} \\
&\quad \top
\end{aligned}
$$

直接 $\neg A \equiv \top$ を言うのは大変なので，これを使って $\neg A$ の妥当性を示してみよう．

まず，$(\forall x.\neg S(x, x) \Rightarrow S(c, x)) \wedge (\forall x.S(c, x) \Rightarrow \neg S(x, x)) \equiv \forall x.(\neg S(x, x) \Rightarrow S(c, x)) \wedge (S(c, x) \Rightarrow \neg S(x, x))$ である．そして，$\models (\forall x.(\neg S(x, x) \Rightarrow S(c, x)) \wedge (S(c, x) \Rightarrow \neg S(x, x))) \Rightarrow$

$(\neg S(c,c) \Rightarrow S(c,c)) \wedge (S(c,c) \Rightarrow \neg S(c,c))$ である．また，下記のように $(\neg S(c,c) \Rightarrow S(c,c)) \wedge (S(c,c) \Rightarrow \neg S(c,c)) \equiv \bot$ である．

$$
\begin{aligned}
(\neg S(c,c) \Rightarrow S(c,c)) \wedge (S(c,c) \Rightarrow \neg S(c,c)) &\equiv \{\,\text{含意の法則}\,\}\\
&\quad (\neg\neg S(c,c) \vee S(c,c)) \wedge (\neg S(c,c) \vee \neg S(c,c))\\
&\equiv \{\,\text{二重否定除去}\,\}\\
&\quad (S(c,c) \vee S(c,c)) \wedge (\neg S(c,c) \vee \neg S(c,c))\\
&\equiv \{\,\text{冪等律}\,\}\\
&\quad S(c,c) \wedge \neg S(c,c)\\
&\equiv \{A \wedge \neg A \equiv \bot\}\\
&\quad \bot
\end{aligned}
$$

よって，$\neg\bigl(\forall x.(\neg S(x,x) \Rightarrow S(c,x)) \wedge (S(c,x) \Rightarrow \neg S(x,x))\bigr)$ が言え，これと同値である $\neg A$ が言える． $\square$