情報論理学 2016 年第 8 週分ハンドアウト

担当：松田一孝

**前のつづき**

**定義 5.1.** シグニチャ $L$ 上の論理式 $A$ と $B$ が**論理的同値**であるとは，任意の $L$ 構造 $M = (D, I)$ と関数 $\theta \in$ 個体変数 $\to D$ に対し，$[\![A]\!]_{M,\theta} = [\![B]\!]_{M,\theta}$ となることをいい，$A \equiv B$ と書く．

**定理 5.1.** 任意の論理式 $A$ と $B$ に対し，$A \equiv B$ ならば，そのときに限り $A \models B$ かつ $B \models A$．□

**定理 5.2.** 任意の論理式 $A$ に対し，$A$ が妥当ならば，そのときに限り $A \equiv \top$．

命題論理の場合と同様に，論理的同値は合同関係である．たとえば，$A \equiv B$ ならば $\forall x.A \equiv \forall x.A$ や $\exists x.A \equiv \exists x.B$ が言える．

なお，前回の講義資料で述語論理式の妥当性は決定不能問題であると述べたが，試験で問われるような「妥当な論理式が与えられたときに，それが妥当である証拠（同値変形や（健全性を仮定した上での）導出）を示すこと」についてはきちんとアルゴリズムが存在する[1]ので安心？ してほしい．

# 6 束縛変数と自由変数，そして代入

解釈の定義に従って述語論理式が恒真であるのを示すのが大変であることは，これまでに説明した通りである．そのため，同値変形を利用し妥当性を示したいのであるが，そのためにはいくつかの概念を導入しておく必要がある．

たとえば，ソクラテスの例で考えた，論理式

$$P(c) \wedge (\forall x.P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow Q(c)$$

の妥当性を同値変形により確認することを考えてみよう．そのためには，$\forall x.P(x) \Rightarrow Q(x)$ と，定項 $c$ に関する何らかの式についての関係を示さなければならない．この具体例については，$(\forall x.P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow (P(c) \Rightarrow Q(c))$ という妥当な（つまり $\top$ と同値な）式を利用すればよい．あとは, $A = P(c), B = Q(c), C = \forall x.P(x) \Rightarrow Q(x)$ と置くと, 論理式が $A \wedge C \wedge (C \Rightarrow (A \Rightarrow B)) \Rightarrow B$ という形になるので，命題論理の同値変形規則だけを用いてこの論理式の妥当性を確認するとができる．

では，この妥当式はどうやって得られたものだろうか？ 式の形に注目すると，上の妥当式は $(\forall x.A) \Rightarrow A'$ という形をしており，$A'$ は $A$ 中の $x$ を何らかの項で置き換えたものである．ここでは，この「置き換え」（**代入**と呼ばれる）の概念を導入する．

## 6.1 出現

一般に論理式は

$$(\forall x.P(x)) \Rightarrow Q(x)$$

のように，同じ変数を複数個含む．しかしながら，式中の 2 回**現れる**（occur）$x$ をそれぞれの区別して扱いたいときがある．そういった場合に $x$ の出現（occurrence）という言葉を用いる．大雑把に言えば，〜の出現とは論理式中におけるその〜が現れる位置[2]のことである．たとえば，$x$ の

[1]形式的に言えば，妥当な論理式の集合は枚挙可能である．

[2]形式的には論理式を木とみたときの根からのパスで定義するが，本講義では出現を形式的に定義はしない．

最初の出現は $(\forall x.P(\underline{x})) \Rightarrow Q(x)$ の下線のものであるし，$x$ の二つ目の出現は $(\forall x.P(x)) \Rightarrow Q(\underline{x})$ の下線のものである．ここで，「変数 $x$ の出現」といった場合に項として $x$ が用いられる場合のみを考え，$\forall x$ の $x$ は $x$ の出現に含めない．また，出現を考える際にその出現の基準となる論理式が存在を暗に仮定していることに注意する．

**練習問題 6.1.** 以下の論理式にそれぞれの対し，$x$ の出現全てに下線を引け．

$$P(x) \qquad Q(f(x), x) \qquad P(x) \wedge \forall x.Q(x) \qquad \forall x.P(x, y) \Rightarrow \forall y.\exists x.Q(y, x)$$

□

## 6.2 スコープ，束縛変数と自由変数，代入

$\forall$ および $\exists$ を**量化子**（quantifier）と呼ぶ．量化子を指すメタ変数として $\mathcal{Q}$ を用いることがある．

**定義 6.1** (スコープ)**.** 論理式 $\mathcal{Q}x.A$ の出現において，$A$ の部分を，この量化子出現の**スコープ**であるという．

要はプログラミング言語における変数のスコープと同じである．SML において，`fn x => e` の $x$ のスコープが $e$ の中であるとの同じように，$\forall x.A$（あるいは $\exists x.A$）の，この量化子 $\forall$（で導入される $x$ の）スコープが $A$ のであるということである．

**例 6.1.** $\forall x.\boxed{(\forall x.\underline{P(x)}) \Rightarrow Q(x)}$ において，最初の $x$ の束縛のスコープは四角内，二個目の $x$ の束縛の有効範囲は下線部である． □ □

**定義 6.2** (束縛変数と自由変数)**.** 変数 $x$ の出現が，論理式 $\mathcal{Q}x.A$ の中に現れるとき，この変数 $x$ の出現を**束縛されている**（bound）という．束縛されていない変数 $x$ の出現を**自由**（free）という． □

束縛されているか自由であるは出現に対する概念であり，どの論理式における出現を考えているかによって変数の $x$ の出現が束縛されているか自由かが変わりうる．たとえば，$P(x)$ における $x$ の出現は自由であるが，$\forall x.P(x)$ における $x$ の出現は束縛されている．

**定義 6.3** (束縛関係)**.** 論理式 $\mathcal{Q}x.A$ の出現において，$A$ 中の変数 $x$ の出現が，論理式 $A$ において自由であるとき，その量化子 $\mathcal{Q}$ の出現がその変数の $x$ の出現 $x$ を束縛するという． □

**練習問題 6.2.** 以下の論理式それぞれに対し，出現する変数それぞれが自由か束縛されているかを答えよ．また，束縛されている場合，その変数を束縛している量化子の出現も答えよ．

$$P(x) \wedge \forall x.Q(x) \qquad P(x) \Rightarrow (\forall x.P(x) \Rightarrow \forall x.P(x))$$
$$\forall x.P(x, y) \Rightarrow (\forall y.\exists x.Q(y, x) \Rightarrow R(x)) \Rightarrow R(x)$$

□

論理式が与えられたときに，その式中で自由な出現を持つ変数を**自由変数**という．まず，項 $t$ に含まれる自由変数の集合 $\mathrm{FV}(t)$ を定義する．

**定義 6.4** (項の自由変数)**.** 項 $t$ に対し，$t$ に含まれる自由変数の集合 $\mathrm{FV}(t)$ を以下のように帰納的に定義する．

$$\mathrm{FV}(x) = \{x\}$$
$$\mathrm{FV}(f(t_1, \ldots, t_n)) = \mathrm{FV}(t_1) \cup \cdots \cup \mathrm{FV}(t_n)$$

□

つまり，$\mathrm{FV}(t)$ は $t$ に含まれる変数全てからなる集合である．そして，式に含まれる自由変数の集合を以下のように定義する．

**定義 6.5** (論理式の自由変数)**.** 論理式 $A$ に対し，$A$ に含まれる自由変数の集合 $\mathrm{FV}(A)$ を以下のように帰納的に定義する．

$$\begin{aligned}
\mathrm{FV}(P(t_1,\ldots,t_n)) &= \mathrm{FV}(t_1)\cup\cdots\cup\mathrm{FV}(t_n)\\
\mathrm{FV}(\top) &= \emptyset\\
\mathrm{FV}(\bot) &= \emptyset\\
\mathrm{FV}(\neg A) &= \mathrm{FV}(A)\\
\mathrm{FV}(A\wedge B) &= \mathrm{FV}(A\vee B) = \mathrm{FV}(A\Rightarrow B) = \mathrm{FV}(A)\cup\mathrm{FV}(B)\\
\mathrm{FV}(\mathcal{Q}x.A) &= \mathrm{FV}(A)\setminus\{x\}
\end{aligned}$$

□

**例 6.2.**

$$\mathrm{FV}(P(x)\wedge\forall y.P(y)) = \{x\}$$
$$\mathrm{FV}((\forall x.P(x)\wedge\exists y.Q(y,x))\Rightarrow R(y)) = \{y\}$$

□

自由変数を含まない論理式を**閉じた**（closed）式といい，そうでない式を**開いた**（open）式という．

**定理 6.1.** 任意の論理式 $A$ について，$x\notin\mathrm{FV}(A)$ ならば $\mathcal{Q}x.A\equiv A$. □

## 6.3 代入（substitution）

ものすごく大雑把には，「$t$ を $x$ に代入する」とは，変数 $x$ を $t$ に置き換えることである．項への代入の適用については，この素朴なアイデアに従ったので問題はない．実際に以下のように形式的に定義される[3].

**定義 6.6** (項に対する代入)**.** 項 $t'$ における変数 $x$ への項 $t$ の**代入**を $t'[t/x]$ と書き，以下のように帰納的に定義する．

$$y[t/x] = \begin{cases} t & \text{if } y = x\\ y & \text{otherwise}\end{cases}$$
$$f(t_1,\ldots,t_n)[t/x] = f(t_1[t/x],\ldots,t_n[t/x])$$

□

しかしながら，論理式 $A$ に対する代入には注意が必要である．まずは注意する点は，素朴に変数 $x$ の出現全てを $t$ に置き換えたのではいけないことである．たとえば,

$$((\forall x.P(x))\Rightarrow Q(x))[t/x] = (\forall x.P(t))\Rightarrow Q(t)$$

[3]今回は代入されたものを「代入」として定義した，代入する行為を「代入」と定義することもある．たとえば，代入 $\theta$ とは変数の集合から項の集合への関数で，$\theta(x)\neq x$ なる $x$ が高々有限のものであるとするなど．

とするのはおかしい．なぜならば，二個目の変数 $x$ の出現は，$\forall$ により導入されたものであって，最初の $x$ の出現とは何ら関係がないためである．

とすれば，変数 $x$ の自由な出現全てを $t$ をに置き換えるように定義すればよいように思えるかもしれない．しかしながら，これも不十分である．なぜならば，$t$ は自由変数を持つかもしれず，代入によって束縛関係が変わってしまう場合があるためだ．たとえば，自由な出現を全てを単純に置き換えると以下のようになってしまう．

$$(\forall y.P(x,y))[y/x] = \forall y.P(y,y)$$

この挙動は，代入先である $y$ は，式中の $\forall$ により導入された $y$ とは何ら関係がないので望ましくない．

上記の問題を避けるために，束縛変数の名前換えをしてから代入することを行う．たとえば，上の例だと $\forall y.P(x,y)$ を $\forall z.P(x,z)$ としてから自由な $x$ の出現を $y$ へ代入し，

$$(\forall y.P(x,y))[y/x] = \forall z.P(y,z)$$

とする．

また，以降，本講義では，束縛変数を束縛の関係を保存するように名前換えをした論理式を，（等価でなく）**同じ**論理式であると見なす．たとえば，$\forall x.P(x)$ と $\forall y.P(y)$ は同じ論理式であるが，$P(x)$ と $P(y)$ や，$\forall x.P(x,y)$ と $\forall x.P(x,x)$ は異なる論理式である．このことは，$f(x) = x+1$ と $f(y) = y+1$ が同じ関数であることと同様である．

形式的には論理式に対する代入は以下で定義する．

**定義 6.7** (論理式に対する代入)**.** 論理式 $A$ における変数 $x$ への $t$ の代入 $A[t/x]$ を以下のように帰納的に定義する．

$$\begin{aligned}
P(t_1,\dots,t_n)[t/x] &= P(t_1[t/x],\dots,t_n[t/x]) \\
\top[t/x] &= \top \\
\bot[t/x] &= \bot \\
(\neg A)[t/x] &= \neg(A[t/x]) \\
(A \wedge B)[t/x] &= A[t/x] \wedge B[t/x] \\
(A \vee B)[t/x] &= A[t/x] \vee B[t/x] \\
(A \Rightarrow B)[t/x] &= A[t/x] \Rightarrow B[t/x] \\
(\mathcal{Q}y.A)[t/x] &= \begin{cases} \mathcal{Q}y.A & \text{if } x = y \\ \mathcal{Q}y.A[t/x] & \text{if } x \neq y \text{ かつ } y \notin \mathrm{FV}(t) \\ (\mathcal{Q}z.A[z/y])[t/x] & \text{if } x \neq y \text{ かつ } y \in \mathrm{FV}(t) \text{ かつ } z \notin \mathrm{FV}(t) \end{cases}
\end{aligned}$$

□

これでようやく，$\forall$ や $\exists$ で量化されたものと具体的な項に関する重要な妥当式を述べることができる．

**定理 6.2.** 任意の論理式 $A$，変数 $x$，項 $t$ に対し以下は妥当．

- $(\forall x.A) \Rightarrow A[t/x]$
- $A[t/x] \Rightarrow \exists x.A$ □