情報論理学 2016 年第 7 週分ハンドアウト

担当：松田一孝

5　述語論理の意味論

以下のような推論が妥当かどうか考えてみよう．

> ソクラテスは人間である．
> **全ての**人間は定命である．
> よって，ソクラテスは定命である．

これらの推論の妥当性を議論するのに命題論理では不十分である．たとえば，ソクラテスが人間であることと，全ての人間が定命であることがどういった関係にあるだろうか？ 命題論理ではこれらの二つの命題をより細かいものに分割することは難しく，したがって，それらの命題から「ソクラテスは定命である」という結論を得ることは難しい．

（一階）述語論理（(first-order) predicate logic）は命題ではなく述語を基本単位とする命題である．述語とは「〜は人間である」や「〜は定命である」といったような，「〜」を与えることで初めて真偽が定まるような主張である．ここで，「〜」は「ソクラテス」や「消しゴム」といった**個体**（individuals）を動くことに注意する．また，述語論理では「全ての個体について…である」や「ある個体について…である/…であるような個体が存在する」という主張も表現可能である．

実際，ソクラテスを c という**定数**，「x は人間である」という述語を $P(x)$，「x は定命である」という述語を $Q(x)$ と置いてみよう．全ての x に関して A であるという命題は述語論理では $\forall x.A$ と書く．すると，「全ての人間は定命である」という命題は $\forall x.P(x) \Rightarrow Q(x)$ と書ける．するとこの推論の妥当性は，これまでの命題論理における議論と同様に，$P(c) \wedge (\forall x.P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow Q(c)$ という論理式が P，Q や c の解釈によらず真になることと定式化できる．

また，次の推論を考えてみよう．

> 誰にも好きな人が存在する．
> だから，きっと君のことを好きな人もいるよ！

ここで，君を c という定数と置き，「x が y のことを好き」という述語を $L(x,y)$ と置いてみよう．A となる x が存在するとう命題は述語論理では $\exists x.A$ と書く．すると，「誰にも好きな人が存在する」という命題は $\forall x.\exists y.L(x,y)$ と書ける．ここで，$\exists y.\forall x.L(x,y)$ は「誰からも好かれる人が存在する」という違う意味の論理式であることに注意しよう．この点は後で詳しく述べる．前と同様にこの推論の妥当性は $(\forall x.\exists y.L(x,y)) \Rightarrow \exists z.L(z,c)$ が L と c の解釈によらず真になることと定式化できる．ちなみにこの推論は妥当ではない．

5.1　シグニチャ

述語論理式は命題論理式と違って，述語変数は決った数の引数をとる．なので，$P(x) \wedge P(x,x)$ というものは正しい論理式ではない．シグニチャは述語変数や個体定数などの引数を定めるものである．

定義 5.1 (シグニチャ)．**シグニチャ**（signature）は，三つ組 $L = (\mathcal{F}, \mathcal{P}, \mathsf{arity})$ である．ここで，

- $\mathcal{F}$ は**関数記号**（function symbol）の集合
- $\mathcal{P}$ は**述語変数**（predicate variable）の集合
- $\mathsf{arity} : (\mathcal{F} \cup \mathcal{P}) \to \mathbb{N}$ はアリティ（引数の数）を返す関数

である． $\square$

形式言語理論においては，arity の定まったシンボルの集合は**ランク付きアルファベット**（ranked alphabet）と呼ばれる．ランク付きアルファベット Σ に対し，$\Sigma^{(n)} = \{\sigma \in \Sigma \mid \mathsf{arity}(\sigma) = n\}$ と定義する．また，シンボル $\sigma \in \Sigma$ が $\mathsf{arity}(\sigma) = n$ であるとき，$\sigma^{(n)}$ と書くことがある．しばしば，arity の定義は陽には与えず，シグニチャを $(\mathcal{F}, \mathcal{P})$ のように書くことがある．$f \in \mathcal{F}^{(0)}$ を**（個体）定数**（(individual) constant）と呼ぶことがある．

次に項という概念を定義する．項とは $\forall$ や $\exists$ で導入された変数や定数，それらに関数を適用して得られるもの等の個体を指し示すものである．

定義 5.2 (項)**.** ランク付きアルファベット $\mathcal{F}$ に対し，項の集合を以下により帰納的に定義する．

- 個体変数 x は項である
- $(t_1, \ldots, t_n)$ が項であるとき，$f^{(n)} \in \mathcal{F}$ に対し，$f(t_1, \ldots, t_n)$ も項である． $\square$

ただし，項 $f()$ は括弧を省略し，単に f と書く．二引数関数記号 $f^{(2)}$ に対し中置記法を用いることがある（例：$+^{(2)}$ や $-^{(2)}$ など）．

例 5.1. $\mathcal{F} = \left\{0^{(0)}, s^{(1)}, add^{(2)}\right\}$ について，以下は項の例である．

$$0 \qquad s(0) \qquad add(0, s(0)) \qquad s(add(0, add(s(0), 0)))$$

それに対し，s や，$s(0, 0)$，1 などは $\mathcal{F}$ の項ではない． $\square$

定義 5.3 (述語論理式)**.** シグニチャ $L = (\mathcal{F}, \mathcal{P})$ の元での述語論理式の集合を以下により帰納的に定義する．

- $P^{(n)} \in \mathcal{P}$ および $\mathcal{F}$ の項 $t_1, \ldots, t_n$ に対し，$P(t_1, \ldots, t_n)$ は述語論理式である．
- $\top$ および $\bot$ は述語論理式である．
- A が述語論理式ならば，$\neg A$ も述語論理式である．
- A と B が述語論理式ならば，$A \wedge B$，$A \vee B$ および $A \wedge B$ も述語論理式である．
- A が述語論理式ならば $\forall x.A$ も述語論理式である．
- A が述語論理式ならば $\exists x.A$ も述語論理式である． $\square$

項の場合と同様，$P()$ は単に P と書く．直感的には $\forall x.A$ は「任意の個体 x について A が成り立つ」ことを，$\exists x.A$ は「ある個体 x について A が成り立つ」ことを表している．$\forall x. \ldots$ と $\exists x. \ldots$ の優先度は最弱であるとする．すなわち，$\forall x.P(x) \Rightarrow \exists y.Q(y)$ は $\forall x.(P(x) \Rightarrow \exists y.Q(y))$ を意味する．命題変数とは 0 引数述語変数に他ならず，命題論理式は述語論理式のサブセットであることに注意する．また，シグニチャにより $P(x) \wedge P(x, x)$ や $Q(f(c), f(c, c))$ と言ったものが排除されているのに注意する．

冒頭のソクラテスの例は，$P(x)$ を「x が人間である」という述語，$Q(x)$ を「x が定命である」という述語だとし，c をソクラテスをあらわす定数とすると，

$$P(c) \wedge (\forall x.P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow Q(c)$$

と書ける．

5.2 L 構造と解釈

命題論理における付値に相当する概念として L 構造を導入する．要は，「ある D を決めて，n 項述語は D 上の n 項関係，n 項関数記号は D 上の n 項関数と解釈しましょう」とだけの話である．ただそうすると 0 項述語の解釈がよくわからないので述語に統一的な解釈を行えるようにするために，関係そのものではなく関係の定義関数を用いて L 構造を定義する．

定義 5.4 (L 構造)**.** $L = (\mathcal{F}, \mathcal{P})$ をシグニチャとする．L **構造**（L-structure）は二つ組 $M = (D, I)$ である．ここで，

- D は**（議論）領域**（domain (of discourse)）と呼ばれる**非空**な集合
- I は**解釈**（interpretation）と呼ばれ，$f^{(n)} \in \mathcal{F}$ を $I(f) \in D^n \to D$ に，$P^{(n)} \in \mathcal{P}$ を $I(P) \in D^n \to \{\mathrm{T}, \mathrm{F}\}$ に写す関数（すなわち $I \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (\mathcal{F}^{(n)} \to (D^n \to D)) \cap (\mathcal{P}^{(n)} \to (D^n \to \{\mathrm{T}, \mathrm{F}\}))$）

である．□

$I(P^{(0)}) \in \{\mathrm{T}, \mathrm{F}\}$ であることに注意，また $n \geq 1$ について $I(P^{(n)})$ は D 上の n 項関係に対応することに注意する．今後 $n \geq 1$ であるとき $I(P^{(n)})$ を D 上の n 項関係により定義することがある．

関数 f に対し，$f[a \mapsto b]$ を

$$f[a \mapsto b](x) = \begin{cases} b & \text{if } x = a \\ f(x) & \text{otherwise} \end{cases}$$

により定義する．

定義 5.5 (項の解釈)**.** $L = (\mathcal{F}, \mathcal{P})$ をシグニチャとする．このとき，$\mathcal{F}$ の項 t の，

$M = (D, I)$ を L 構造とする．L **構造** $M = (D, I)$ および，関数 $\theta \in$ 個体変数 $\to D$ のもとでの**解釈** $[\![t]\!]_{M,\theta} \in D$ を以下により帰納的に定義する．

$$\begin{aligned} [\![x]\!]_{M,\theta} &= \theta(x) \\ [\![f(t_1, \ldots, t_n)]\!]_{M,\theta} &= I(f)([\![t_1]\!]_{M,\theta}, \ldots, [\![t_n]\!]_{M,\theta}) \end{aligned}$$

□

定義 5.6 (述語論理式の解釈)**.** シグニチャ L の元での論理式 A の，L **構造** $M = (D, I)$ および，

関数 $\theta \in$ 個体変数 $\to D$ のもとでの**解釈** $\llbracket A \rrbracket_{M,\theta} \in \{\mathrm{T}, \mathrm{F}\}$ を以下により帰納的に定義する．

$$
\begin{aligned}
\llbracket P(t_1, \ldots, t_n) \rrbracket_{M,\theta} &= I(P)(\llbracket t_1 \rrbracket_{M,\theta}, \ldots, \llbracket t_n \rrbracket_{M,\theta}) \\
\llbracket \top \rrbracket_{M,\theta} &= \mathrm{T} \\
\llbracket \bot \rrbracket_{M,\theta} &= \mathrm{F} \\
\llbracket \neg A \rrbracket_{M,\theta} &= \begin{cases} \mathrm{T} & \text{if } \llbracket A \rrbracket_{M,\theta} = \mathrm{F} \\ \mathrm{F} & \text{otherwise} \end{cases} \\
\llbracket A \wedge B \rrbracket_{M,\theta} &= \begin{cases} \mathrm{T} & \text{if } \llbracket A \rrbracket_{M,\theta} = \llbracket B \rrbracket_{M,\theta} = \mathrm{T} \\ \mathrm{F} & \text{otherwise} \end{cases} \\
\llbracket A \vee B \rrbracket_{M,\theta} &= \begin{cases} \mathrm{F} & \text{if } \llbracket A \rrbracket_{M,\theta} = \llbracket B \rrbracket_{M,\theta} = \mathrm{F} \\ \mathrm{T} & \text{otherwise} \end{cases} \\
\llbracket A \Rightarrow B \rrbracket_{M,\theta} &= \begin{cases} \mathrm{F} & \text{if } \llbracket A \rrbracket_{M,\theta} = \mathrm{T} \text{ かつ } \llbracket B \rrbracket_{M,\theta} = \mathrm{F} \\ \mathrm{T} & \text{otherwise} \end{cases} \\
\llbracket \forall x.A \rrbracket_{M,\theta} &= \begin{cases} \mathrm{T} & \text{if 全ての } d \in D \text{ について} \llbracket A \rrbracket_{M,\theta[x \mapsto d]} = \mathrm{T} \\ \mathrm{F} & \text{otherwise} \end{cases} \\
\llbracket \exists x.A \rrbracket_{M,\theta} &= \begin{cases} \mathrm{T} & \text{if } \llbracket A \rrbracket_{M,\theta[x \mapsto d]} \text{となる } d \in D \text{ が存在} \\ \mathrm{F} & \text{otherwise} \end{cases}
\end{aligned}
$$

□

$\llbracket A \rrbracket_{M,\theta} = \mathrm{T}$ であるとき, (M, θ) を A のモデルであると言い, $M, \theta \models A$ と書く．また, $\llbracket A \rrbracket_{M,\theta} = \mathrm{F}$ であるとき，(M, θ) を A の反証モデル（countermodel）といい $M, \theta \not\models A$ と書く[1].

例 5.2. $\forall$ と $\exists$ の順序で式の意味は代わる．今 $L = (\emptyset, \{L^{(2)}\})$ というシグニチャとその上の論理式 $\forall x.\exists y.L(x, y)$，$\exists y.\forall x.L(x, y)$ とその典型的なモデルについて考えてみよう．

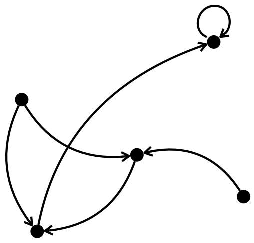

図 1: $\forall x.\exists y.L(x, y)$ の典型的なモデル

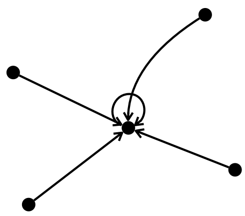

図 2: $\exists y.\forall x.L(x, y)$ の典型的なモデル

上図にそれぞれの論理式の典型的なモデルのイメージ図を示す．各点が議論領域の元に対応し，点 d から d' への矢印は $I(L)(d, d') = \mathrm{T}$ ということを表している．

L を「x が y のことが好きである」ということを表しているとしてみよう．すると，図 1 に示すように，$\forall x.\exists y.L(x, y)$ は,「誰にでも好きな人がいる」ことを表す．そして，図 2 に示すように，$\exists y.\forall x.L(x, y)$ は,「みんなから好かれている人がいる」ことを表す． □

練習問題 5.1. シグニチャ $L = (\left\{0^{(0)}, add^{(2)}\right\}, \{P^{(2)}\})$ の下での論理式

$$
\begin{aligned}
A &= \forall x.\exists y.P(x, y) \\
B &= \exists y.\forall x.P(x, y)
\end{aligned}
$$

[1] 命題論理のときにこの言葉を導入しわすれてました．申し訳ありません．

を考える．また，θ を

$$\theta(x) = \theta(y) = 0$$

で定義する．また L 構造 $M_1 = (D_1, I_1)$ を $D_1 = \mathbb{N}$ および

$$\begin{aligned} I_1(0) &= 0 \\ I_1(+)(x, y) &= x + y \\ I_1(P)(x, y) &= x < y \end{aligned}$$

で定義する．このとき，$[\![A]\!]_{M_1,\theta}$ および $[\![A]\!]_{M_1,\theta}$ を求めよ．□

5.3 恒真・論理的帰結

定義 5.7 (妥当性)**.** 論理式 A が，任意の M および θ に対して $M, \theta \models A$ となるとき，A を**妥当**（valid）と言う．□

妥当であることを恒真とも言うが，トートロジーとは呼ばれない [2]．

例 5.3. $P(c) \wedge (\forall x.P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow Q(c)$ が妥当であることを確認する．

まず，$M = (D, I)$ および θ を考える．$[\![P(c) \wedge (\forall x.P(x) \Rightarrow Q(x))]\!]_{M,\theta} = \mathrm{T}$ だと仮定する．よって $I(P)(I(c)) = \mathrm{T}$ であり，任意の $d \in D$ に対し $[\![P(x) \Rightarrow Q(x)]\!]_{M,\theta[x \mapsto d]} = \mathrm{T}$ となる．よって，$[\![P(x) \Rightarrow Q(x)]\!]_{M,\theta[x \mapsto I(c)]} = \mathrm{T}$ となる．いま $[\![P(x)]\!]_{M,\theta[x \mapsto I(c)]} = I(P)(I(c)) = \mathrm{T}$ であるため，$[\![Q(x)]\!]_{M,\theta[x \mapsto I(c)]} = I(Q)(I(c)) = \mathrm{T}$ である．よって，$[\![Q(c)]\!]_{M,\theta} = I(Q)(I(c)) = \mathrm{T}$ となる．以上の議論により，$[\![P(c) \wedge (\forall x.P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow Q(c)]\!]_{M,\theta} = \mathrm{T}$．□

練習問題 5.2. $(\forall x.\exists y.L(x, y)) \Rightarrow \exists z.L(z, c)$ が妥当でないことを示せ．□

練習問題 5.3. 以下の言明を考える．

ある床屋は，自分で髭を剃らない人全ての髭を剃る．

定数 c を床屋，$P(x, y)$ を「x が y の髭を剃る」という述語として，上記言明を論理式に直せ．また，その論理式にモデルが存在するか議論せよ．□

述語論理式の妥当性の確認は命題論理と比べて難しい．具体的には命題論理の恒真性の判定は決定可能なのに対し，述語論理式の妥当性の判定は決定不能であることが知られている．

定理 5.1. 述語論理式の妥当性判定は決定不能．□

$\Gamma = A_1, \ldots, A_n$ に対し，任意の i $(1 \leq i \leq n)$ に対し，$M, \theta \models A_i$ となるとき $M, \theta \models \Gamma$ と書くことにする．

定義 5.8 (論理的帰結)**.** 論理式の列 Γ および論理式 A に対し，$M, \theta \models \Gamma$ となるような任意の M と θ に対し，$M, \theta \models A$ となるとき，A を Γ の**論理的帰結**であるといい，$\Gamma \models A$ と書く．□

練習問題 5.4. $\forall x.P(x) \models \exists x.P(x)$ であることを確認せよ．このとき議論領域は非空であることが重要になる．

[2] 理由は知らないが tautology は命題論理的な恒真式のみを指し，述語論理において恒真な式を tautology とは言わないようだ．