情報論理学 2016 年第 4，5 週分ハンドアウト

担当：松田一孝

お知らせ

今やっている証明論の内容を終えたら中間試験相当のレポート課題を出します．課題は講義および講義ページ（`http://www2.sf.ecei.tohoku.ac.jp/~kztk/teaching/2016/logic/`）にて提示します．今後数回分の講義は

5/10 命題論理の証明論

5/17 命題論理の証明論（つづき），レポート課題

5/24 直観主義命題論理と型

5/31 レポートの解説，述語論理の意味論

を予定しています．
なお，レポートは，LaTeX や Word 等を用いて電子的に作成された PDF ファイルしか受けとらない予定です．
期末試験は以前アナウンスした通り 7/19 です．こちらは 7/26 にその解説を行います．

2 命題論理の証明論

目的：命題論理の証明を形式化する．

本講義では，**自然演繹**（natural deduction）と呼ばれるシステムを紹介する．

ノート． これまで，命題論理式とは何かを表す（denote する）ものであった．より具体的には，**解釈**により，各論理式 A は付値 v から真偽値 $[\![A]\!]_v$ への関数としての**意味**が定まっていた．すなわち，論理式とは付値から真偽値への関数を表すものであった．こうした「何を表すか」を議論する立場を**意味論**と呼ぶ．それとは異なり，証明論では命題論理式を「何かを表すもの」ではなく，ただの記号（の木）として見て，その操作（つまり，証明）に注目する．たとえば，証明論においては $P \wedge Q$ は「$P \wedge Q$」そのものであって何かを表すものではない．

2.1 判断，推論規則，導出木

推論規則（inference rule）は

$$\frac{J_1 \quad J_2 \quad \dots \quad J_n}{J}\ (\text{rule name})$$

の形をした規則であり，直感的には「$J_1, J_2, \dots, J_n$ すべてが『成り立つ』とき，J も『成り立つ』」ことを表している．ここで，J および各 J_i は**判断**と呼ばれる．判断 J をこの規則の**結論**と呼び，各判断 J_i をこの規則の**前提**と呼ぶ．なお，n が 0 であるとき，「棒」はしばしば省略される．また，(rule name) はこの規則の名前であるが，それぞれの規則の名前に興味がなければ名前を付けないこともある．

例 2.1. $A\,\mathbf{prop}$ を「A が命題論理式である」という判断であるとする．

すると，この判断に対する推論規則は以下のように与えることができる．

$$\frac{}{\top\,\mathbf{prop}}\ (\top\text{-prop}) \qquad \frac{}{\bot\,\mathbf{prop}}\ (\bot\text{-prop}) \qquad \frac{}{P\,\mathbf{prop}}\ (\text{var-prop}) \qquad \frac{A\,\mathbf{prop}}{(\neg A)\,\mathbf{prop}}\ (\neg\text{-prop})$$

$$\frac{A\,\mathbf{prop} \qquad B\,\mathbf{prop}}{(A \wedge B)\,\mathbf{prop}}\ (\wedge\text{-prop}) \qquad \frac{A\,\mathbf{prop} \qquad B\,\mathbf{prop}}{(A \vee B)\,\mathbf{prop}}\ (\vee\text{-prop}) \qquad \frac{A\,\mathbf{prop} \qquad B\,\mathbf{prop}}{(A \Rightarrow B)\,\mathbf{prop}}\ (\Rightarrow\text{-prop})$$

それぞれ, 第 1 回で紹介した命題論理式の定義に対応していることを確認せよ．たとえば, ($\neg$-prop) は「A が命題論理式であるとき，$\neg A$ も命題論理式である」ということに対応する． □

上記の例のように一般には規則はメタ変数を含む（このような規則を正確には規則図式（inference rule schema）と呼ぶが，しばしば明示的に区別されない）．規則におけるメタ変数をそのメタ変数に対応する具体的なもので置き換えることで得られる規則を，その規則の**インスタンス**であるという．

たとえば，例 2.1 の例だと

$$\frac{(P \wedge Q)\,\mathbf{prop}}{\neg(P \wedge Q)\,\mathbf{prop}}\ (\neg\text{-prop}) \quad \text{や} \quad \frac{\neg P\,\mathbf{prop}}{\neg\neg P\,\mathbf{prop}}\ (\neg\text{-prop})$$

などが規則 ($\neg$-prop) のインスタンスである．

下記のような，各節点がいずれかの推論規則のインスタンスであるような有限木を**導出木**という．

$$\frac{\dfrac{\dfrac{}{P\,\mathbf{prop}}\ (\text{var-prop}) \quad \dfrac{}{Q\,\mathbf{prop}}\ (\text{var-prop})}{(P \wedge Q)\,\mathbf{prop}}\ (\wedge\text{-prop}) \qquad \dfrac{}{Q\,\mathbf{prop}}\ (\text{var-prop})}{((P \wedge Q) \Rightarrow Q)\,\mathbf{prop}}\ (\Rightarrow\text{-prop})$$

導出木が存在することは，直感的には，各節点の推論規則の前件が全て「成り立」ち，したがって根となる部分の結論も「成り立つ」ことを表す．また，

$$\frac{\vdots}{J}$$

という形の導出木が存在するとき，J **は導出可能である**といい，その導出木を J **の導出木**と呼ぶ．

練習問題 2.1. 例 2.1 の導出規則の下で，$((P \Rightarrow Q) \vee \neg\neg P)\,\mathbf{prop}$ が導出可能であることを確認せよ．

例 2.2. 自然数 n に対し，$n\,\mathbf{even}$ を「n が偶数である」という判断とし，その推論規則を以下で与える．

$$\frac{}{0\,\mathbf{even}}\ (\text{Even-Zero}) \qquad \frac{n\,\mathbf{even}}{(n+2)\,\mathbf{even}}\ (\text{Even-Plus}) \qquad \frac{n\,\mathbf{even}}{(n-2)\,\mathbf{even}}\ (\text{Even-Minus})$$

たとえば，$4\,\mathbf{even}$ は下記の通り導出可能である．

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{0\,\mathbf{even}}\ (\text{Even-Zero})}{2\,\mathbf{even}}\ (\text{Even-Plus})}{4\,\mathbf{even}}\ (\text{Even-Plus})$$

それに対し，$3\,\mathbf{even}$ は導出可能ではない．なお

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{3\,\mathbf{even}}}{1\,\mathbf{even}}\ (\text{Even-Minus})}{3\,\mathbf{even}}\ (\text{Even-Plus})$$

は有限でないため，導出木ではないことに注意する． □

しばしば,「判断そのもの」と「判断の導出可能性」および「判断の導出可能性により定義される関係」は同一視される.たとえば,偶数の集合 $\mathbb{N}2$ を下記のように推論規則を用いて定義することがある.

$$\frac{}{0 \in \mathbb{N}2}\ (\text{Even-Zero}) \qquad \frac{n \in \mathbb{N}2}{n+2 \in \mathbb{N}2}\ (\text{Even-Plus})$$

この場合,(Even-Minus) のような明らかに冗長な規則は通常含めない.

また,逆に $n\,\mathbf{even}$ を「$n\,\mathbf{even}$ が導出可能であること」を表す(メタレベルの)命題として扱うこともしばしばある.

なお,命題論理式の集合の定義に推論規則を用いるのはオーバーキルであり,通常(少くとも理論計算機科学分野の一部では)は次のような BNF(Backus-Naur form)様の記法を用いる.

$$A, B ::= P \mid \neg A \mid A \vee B \mid A \wedge B \mid A \Rightarrow B$$

住井先生担当の「計算機ソフトウェア工学」で近いうちこの記法が紹介されるであろう.また,推論規則は「計算機ソフトウェア工学」の講義でも登場予定である.

2.2 自然演繹(natural deduction)

Γ を命題論理式の列,A を命題論理式としたときに,$\Gamma \vdash A$ という形の判断を考える.この判断は直感的には,「仮定 Γ の下で A が成り立つ」ことを表している.自然演繹はこの形の判断を導出するための推論規則の集まりからなる証明システムの一つである.(この形の判断を扱う証明システムには,他にシーケント計算がある).「$\vdash$」と「$\models$」を混同してはならない.

$\Gamma \vdash A$ が導出可能であるとき,**仮定 Γ の下で A が証明可能**であるといい,特に $\vdash A$ が導出可能であるとき,単に **A が証明可能**であるということにする.

2.2.1 仮定に関する推論規則

$$\frac{}{\Gamma, A, \Delta \vdash A}\ (\text{Ax})$$

2.2.2 $\Rightarrow$ に関する推論規則

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B}\ (\Rightarrow\text{I}) \qquad \frac{\Gamma \vdash A \Rightarrow B \qquad \Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B}\ (\Rightarrow\text{E})$$

練習問題 2.2. 以下を導出せよ.

$$\vdash P \Rightarrow P \qquad P, P \Rightarrow Q \vdash Q \qquad \vdash P \Rightarrow (P \Rightarrow Q) \Rightarrow Q$$
$$\vdash (P \Rightarrow Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow Q) \Rightarrow P \Rightarrow R$$

仮定が導出木に繰り返し出てくる煩雑さを避けるために,適宜変数を使用するとよい. □

2.2.3 $\wedge$ に関する推論規則

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \wedge B}\ (\wedge\mathrm{I}) \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A}\ (\wedge\mathrm{E}) \qquad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B}\ (\wedge\mathrm{E})$$

練習問題 2.3. 以下を導出せよ．

$$P, Q \vdash P \wedge Q \qquad\qquad \vdash P \wedge Q \Rightarrow Q \wedge P \qquad\qquad \vdash (P \wedge Q \Rightarrow R) \Rightarrow P \Rightarrow Q \Rightarrow R$$

□

2.2.4 $\vee$ に関する推論規則

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}\ (\vee\mathrm{I}) \qquad \frac{\Gamma \vdash B}{\Gamma \vdash A \vee B}\ (\vee\mathrm{I}) \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash A \vee B \qquad \Gamma, A \vdash C \qquad \Gamma, B \vdash C}{\Gamma \vdash C}\ (\vee\mathrm{E})$$

練習問題 2.4. 以下を導出せよ．

$$\vdash P \vee Q \Rightarrow Q \vee P \qquad\qquad \vdash P \vee Q \Rightarrow ((P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow R$$

□

2.2.5 $\top$ および $\bot$ に関する推論規則

$$\frac{}{\Gamma \vdash \top}\ (\top\mathrm{I}) \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash A}\ (\bot\mathrm{E})$$

規則 $(\bot\mathrm{E})$ は，しばしば ex falso quodlibet（矛盾からは何でも出てくる）と呼ばれる．

2.2.6 $\neg$ に関する推論規則

$$\frac{\Gamma, A \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg A}\ (\neg\mathrm{I}) \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash A \qquad \Gamma \vdash \neg A}{\Gamma \vdash \bot}\ (\neg\mathrm{E})$$

誤解されやすいが，規則 $(\neg\mathrm{I})$ は背理法ではない．

しばしば $\neg A$ を $A \Rightarrow \bot$ の syntax sugar であると定義することがある．このとき，上記の規則が得られることを確認することはたやすい．

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Gamma, A \vdash \bot}}{\Gamma \vdash A \Rightarrow \bot}\ (\Rightarrow\mathrm{I}) \qquad \dfrac{\dfrac{\vdots}{\Gamma \vdash A} \qquad \dfrac{\vdots}{\Gamma \vdash A \Rightarrow \bot}}{\Gamma \vdash \bot}\ (\Rightarrow\mathrm{E})$$

練習問題 2.5. 以下を導出せよ．

$$\vdash P \Rightarrow \neg\neg P \qquad\qquad \vdash \neg(P \vee Q) \Rightarrow \neg P \wedge \neg Q \qquad\qquad \vdash \neg P \wedge \neg Q \Rightarrow \neg(P \vee Q)$$
$$\vdash \neg P \vee \neg Q \Rightarrow \neg(P \wedge Q) \qquad\qquad \vdash (P \Rightarrow Q) \Rightarrow \neg Q \Rightarrow \neg P$$

□

2.2.7 背理法

これまでの規則は直観主義命題論理に対応するものであり，命題論理の自然演繹はそれに次の規則を加えたものである．

$$\frac{\Gamma, \neg A \vdash \bot}{\Gamma \vdash A}\ (\mathrm{PbC})$$

規則 (¬I) と混同してはならない．

練習問題 2.6. 以下を導出せよ．

$$\vdash P \vee \neg P \qquad \vdash \neg\neg P \Rightarrow P \qquad \vdash \neg(P \wedge Q) \Rightarrow \neg P \vee \neg Q \qquad \vdash (\neg Q \Rightarrow \neg P) \Rightarrow P \Rightarrow Q$$

なお，導出には規則 (PbC) をどこかで使う必要がある． □

背理法の代わりに以下の規則のいずれかを用いることもある．

$$\frac{}{\Gamma \vdash A \vee \neg A}\ (\mathrm{EM}) \qquad \frac{\Gamma \vdash \neg\neg A}{\Gamma \vdash A}\ (\mathrm{DNE})$$

練習問題 2.7. $\neg A \Rightarrow \bot \vdash A$ を導出せよ．ただし，(PbC) を用いてはならず代わりに (EM) を用いてよい．また，(PbC) の代わりに (DNE) を用いる場合はどうか．

2.3 健全性と完全性

以下の定理が成り立つことが知られている．

定理 2.1 (健全性)**.** $\Gamma \vdash A$ が導出可能ならば $\Gamma \models A$. □

定理 2.2 (完全性)**.** $\Gamma \models A$ ならば，$\Gamma \vdash A$ が導出可能． □

本講義では証明はしない．

系 2.1. 任意の命題論理式 A は，自然演繹において A が証明可能か，$[\![A]\!]_v = \mathrm{F}$ なる付値 v を持つ． □

意味論は命題論理式 A が恒真でない（すなわち，健全性・完全性より証明可能でない）ことを示すのに便利である．A が恒真でないことを言うには $[\![A]\!]_v = \mathrm{F}$ となる v を一つ示せばよい．一方，証明論は命題論理式 A が証明可能である（すなわち，健全性・完全性より恒真である）ことを示すのに便利である．A が証明可能であることを言うのには，$\vdash A$ の導出を一つ示せばよい．