情報論理学 2016 年第 3 週分ハンドアウト

担当：松田一孝

2　命題論理：論理的帰結，論理的同値

2.1　論理的帰結

定義 2.1 (論理的帰結). 命題論理式 A と B について，B が A の**論理的帰結**（logical entailment）であるとは，A の任意のモデルが B のモデルであることである．B が A の論理的帰結であることを $A \models B$ と書く．□

記号が，$v \models A$ と流用されていることに注意する．モデルおよび論理的帰結の概念を論理式の列に拡張する．論理式の列 $\Gamma = A_1, \dots, A_n$ に対し，付値 v が Γ のモデルであるとは，任意の A_i $(1 \leq i \leq n)$ に対し $v \models A_i$ となることを言い，$v \models \Gamma$ と書く．また，A が Γ の論理的帰結であるとは，任意の Γ のモデルが A のモデルであることを言い，$\Gamma \models A$ と書く．ここで，Γ が空の列のとき，任意の付値が Γ のモデルとなることに注意する．そのため $\models A$ は A が恒真であることを意味する．

ノート. $\Gamma \models A$ は命題論理式では**ない**ことに注意する．

練習問題 2.1. 以下が成り立つことを確認せよ．

$$A \wedge B \models A \qquad A \models A \vee B \qquad A, A \Rightarrow B \models B \qquad (A \vee B), A \Rightarrow C, B \Rightarrow C \models C$$

定理 2.1. Γ を論理式の列，A と B を論理式であるとする．このとき，$\Gamma \models A \Rightarrow B$ ならば，そのときに限り $\Gamma, A \models B$ である．

証明. **（ならば）** $\Gamma \models A \Rightarrow B$ とする．今 v を Γ, A のモデルであるとする．このとき v は Γ のモデルでもあるので，論理的帰結の定義から $[\![A \to B]\!]_v = \mathrm{T}$ となる．今，$[\![A]\!]_v = \mathrm{T}$ であるので，解釈の定義から $[\![B]\!]_v = \mathrm{T}$ となる．よって，$\Gamma, A \models B$.

（そのときに限り） $\Gamma, A \models B$ とする．今 v を Γ のモデルであるとする．ここで，$[\![A]\!]_v$ によって場合分けし，v が $A \Rightarrow B$ のモデルであることを示す．これにより，$\Gamma \models A \Rightarrow B$ を示すことができる．

もし，$[\![A]\!]_v = \mathrm{F}$ であるとする．すると定義から $[\![A \Rightarrow B]\!]_v = \mathrm{T}$ となるので，v は $A \Rightarrow B$ のモデルである．もし，$[\![A]\!]_v = \mathrm{T}$ であるとする．すなわち，v は A のモデルであり，よって v は Γ, A のモデルである．今 $\Gamma, A \models B$ であるから，v は B のモデルである．つまり $[\![B]\!]_v = \mathrm{T}$．よって，定義から $[\![A \Rightarrow B]\!]_v = \mathrm{T}$ となるので，v は $A \Rightarrow B$ のモデルである．□

系 2.1. A と B を命題論理式とする．このとき $A \models B$ ならば，そのときに限り $\models A \Rightarrow B$ である．□

定理 2.2. 任意の命題論理式 A，B，C および命題論理式の列 Γ，Δ について，以下が成り立つ．

- $A \models A$.
- $\Gamma \models B$ ならば，$\Gamma, A \models B$.
- $\Gamma, A, B, \Delta \models C$ ならば $\Gamma, B, A, \Delta \models C$.
- $\Gamma \models A$ かつ $\Delta, A \models B$ ならば $\Gamma, \Delta \models B$. □

証明. 最初の三つは論理的帰結の定義より自明．よって最後のもののみを示す．

今 v を，Γ, Δ のモデルであるとする．よって，v は Γ のモデルであり，なおかつ Δ のモデルである．このとき，$\Gamma \models A$ から v は A のモデルである．また，$\Delta, A \models B$ より v は B のモデルである．よって，任意の Γ, Δ のモデル v は B のモデルである．ゆえに，$\Gamma, \Delta \models B$ である． □

系 2.2. 任意の命題論理式 A，B および命題論理式の列 Γ について，$\Gamma \models A \Rightarrow B$ かつ $\Gamma \models A$ ならば $\Gamma \models B$ である． □

定理 2.3. 任意の命題論理式 A と B に対し，$\models \neg A$ ならば $A \models B$ である．

証明. $\models \neg A$ より，A にモデルは存在しない．よって任意の A のモデルは B のモデルである． □

2.2 論理的同値

定義 2.2. 論理的同値 A と B が**論理式同値**（logically equivalent）であるとは，任意の付値 v に対し $[\![A]\!]_v = [\![B]\!]_v$ となることを言い，$A \equiv B$ と書く． □

ノート. $A \equiv B$ は命題論理式**ではない**ことに注意する．

定理 2.4. 任意の命題論理式 A と B に対し，$\models (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ ならば，そのときに限り $A \equiv B$.

証明.（ならば）$\models (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ とする．v を付値とする．すると，$[\![(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)]\!]_v = \mathrm{T}$ となる．よって，$[\![A \Rightarrow B]\!]_v = [\![B \Rightarrow A]\!]_v = \mathrm{T}$ である．このとき，$[\![A]\!]_v = \mathrm{T}$ であるとすると $[\![A \Rightarrow B]\!]_v = \mathrm{T}$ から $[\![B]\!]_v = \mathrm{T}$ が言え，また $[\![A]\!]_v = \mathrm{F}$ とすると $[\![B \Rightarrow A]\!]_v = \mathrm{F}$ から $[\![B]\!]_v = \mathrm{F}$ が言える．よって，$[\![A]\!]_v = [\![B]\!]_v$ である．よって，任意の v に対し，$[\![A]\!]_v = [\![B]\!]_v$ である．つまり $A \equiv B$ である．

（そのときに限り）$A \equiv B$ とする．v を付値とする．このとき，$[\![A]\!]_v = [\![B]\!]_v$ となる．ここで $[\![A]\!]_v$ の値で場合分けして，$[\![(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)]\!]_v = \mathrm{T}$ となることを示す．$[\![A]\!]_v = [\![B]\!]_v = \mathrm{T}$ とする．このとき，$[\![A \Rightarrow B]\!]_v = [\![B \Rightarrow A]\!] = \mathrm{T}$ となるため $[\![(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)]\!]_v = \mathrm{T}$ である．$[\![A]\!]_v = [\![B]\!]_v = \mathrm{F}$ とする．このとき，$[\![A \Rightarrow B]\!]_v = [\![B \Rightarrow A]\!] = \mathrm{T}$ となるため $[\![(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)]\!]_v = \mathrm{T}$ である． □

系 2.3. 任意の命題論理式 A と B に対し，$A \models B$ かつ $B \models A$ ならば，そのときに限り $A \equiv B$． □

論理的同値は同値関係である．すなわち以下が成り立つ．

反射律 任意の命題論理式 A に対し，$A \equiv A$.

対象律 任意の命題論理式 A と B に対し，もし $A \equiv B$ ならば $B \equiv A$.

推移律 任意の命題論理式 A，B と C に対し，もし $A \equiv B$ かつ $B \equiv C$ ならば，$A \equiv C$.

定理 2.5. 任意の命題論理式 A，B，C，D について以下が成り立つ．

- $A \equiv B$ ならば $\neg A \equiv \neg B$.
- $A \equiv B$ かつ $C \equiv D$ ならば，$A \wedge C \equiv B \wedge D$.
- $A \equiv B$ かつ $C \equiv D$ ならば，$A \vee C \equiv B \vee D$.
- $A \equiv B$ かつ $C \equiv D$ ならば，$A \Rightarrow C \equiv B \Rightarrow D$. □

すなわち，ある命題論理式の一部分をそれと同値な論理式と置き換えても，元の論理式と同値である．より直感的に言えば，同値な論理式における一部分の置き換えは論理式の「意味」を変えない．

今後の議論の利便性のため，命題論理式に以下の式 $\top$ と $\bot$ を付け加える．また，それぞれの付値 v の元での解釈を以下を定める．

$$[\![\top]\!]_v = \mathrm{T} \qquad [\![\bot]\!]_v = \mathrm{F}$$

このとき，任意の命題論理式 A と B について，以下が成り立つ．

- $\models A$ かつ $A \equiv B$ ならば，$\models B$.
- A が充足可能かつ $A \equiv B$ ならば，B も充足可能.
- $\models A$ ならば，そのときに限り $A \equiv \top$.
- $\models \neg A$ ならば，そのときに限り $A \equiv \bot$.

つまり，$A = A_1 \equiv A_2 \equiv \cdots \equiv A_n = \top$ と同値変形を繰り返すことにより，論理式 A が恒真であることを示すことができる．そのとき，任意の命題論理式 A，B，C について以下の式が同値であることは有用であろう．

$$A \wedge A \equiv A \qquad A \vee A \equiv A \tag{冪等律}$$
$$A \wedge B \equiv B \wedge A \qquad A \vee B \equiv B \vee A \tag{交換律}$$
$$A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C \qquad A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C \tag{結合律}$$
$$A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C) \qquad A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \wedge C) \tag{分配律}$$
$$A \wedge (A \vee B) \equiv A \qquad A \vee (A \wedge B) \equiv A \tag{吸収律}$$
$$\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B \qquad \neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B \tag{de Morgan の法則}$$
$$\neg(\neg A) \equiv A \tag{二重否定の法則}$$
$$A \Rightarrow B \equiv \neg B \Rightarrow \neg A \tag{対偶}$$
$$A \Rightarrow B \equiv \neg A \vee B \tag{含意の法則}$$

また，$\top$ や $\bot$ に関する以下の法則も有用であろう．

$$\begin{aligned} A \wedge \neg A &\equiv \bot & A \vee \neg A &\equiv \top \\ \neg\top &\equiv \bot & \neg\top &\equiv \bot \\ A \wedge \bot &\equiv \bot & A \vee \bot &\equiv A \\ A \wedge \top &\equiv A & A \vee \top &\equiv \top \\ A \Rightarrow \bot &\equiv \neg A & \top \to A &\equiv A \end{aligned}$$

練習問題 2.2. 以下を同値変形により示せ．

- $P \wedge Q \equiv \neg(\neg P \vee \neg Q)$
- $P \Rightarrow \neg Q \equiv R \Rightarrow \neg P$
- $P \wedge (P \Rightarrow Q) \equiv P \wedge Q$
- $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow P) \Rightarrow P \equiv \top$

また，$\models$ は論理式上の前順序関係である．すなわち反射率と推移律が成り立つ．

定理 2.6. 任意の命題論理式 A，B，C，D について以下が成り立つ．

- $A \models B$ ならば $\neg B \models \neg A$.
- $A \models B$ かつ $C \models D$ ならば，$A \land C \models B \land D$.
- $A \models B$ かつ $C \models D$ ならば，$A \lor C \models B \lor D$.
- $A \models B$ かつ $C \models D$ ならば，$B \Rightarrow C \models A \Rightarrow D$. □

論理的帰結も不等式の変形のように示すことができるが，通常の不等式において $a \leq b$ ならば $-b \leq -a$ になるように，否定および含意の前件の部分で大小関係が入れ替わることに注意する．

2.3 メタ

メタ変数 さて，A とか B とかの記号を用いてきたが，これらは命題論理式を表す数学上の変数である．数学の変数であるから，A と B が同じ論理式を指すかもしれないことに注意する．さて命題論理や述語論理には論理式としての構成要素として変数を持つ．これらの対象の体系の変数と数学的な変数を区別して，後者を**メタ変数**と呼ぶ．メタ変数としてどの記号を使うかで変数がどこを動くを区別することがある．本講義ではこれまで A や B を（命題）論理式，v を付値，Γ を論理式の列，P を命題変数を指すメタ変数として使用してきた．

ここで注意が必要なのは P は具体的な命題変数としても，命題変数を指すメタ変数としても利用される点である．たとえば，論理式 $P \lor Q \Rightarrow P$ と書いたときは P と Q は互いに異なる具体的な命題変数を表している．一方，解釈の定義で $[\![P]\!]_v = v(P)$ と書いたときは，P は具体的な命題変数の名前ではなく，何らかの命題変数を指すメタ変数として用いられている．

メタ論理 対象となる論理（ここでは命題論理や一階述語論理）と区別して，その論理体系を扱う数学的な議論で使用される論理を**メタ論理**と呼ぶことがある．本講義では混乱を避けるために，メタ論理では論理記号の使用を避けている．