情報論理学 2016 年第 2 週分ハンドアウト

担当：松田一孝

1 命題論理（Propositional Logic）

命題論理：「命題」を基本単位とする論理.
命題（proposition）：真偽の定まる表明.

例 1. 「1 + 1 + 1 = 3」,「私は松田である」,「2 は 3 より大きい」. □

1.1 命題論理式

定義 (命題論理式). **命題論理式**（propositional formula）を以下のように定義する.

- **命題変数** P は命題論理式である.
- 命題論理式 A に対し，**否定** $\neg A$ は命題論理式である.
- 命題論理式 A と B に対し，**連言** $A \wedge B$，**選言** $A \vee B$，**含意** $A \Rightarrow B$ は命題論理式である.
- 以上の規則によって構成されるもののみが命題論理式である. □

表 1: 命題論理式とその直感的意味

式	読み方	直感的な意味
P	「P」	命題を表す変数
$\neg A$	「A でない」	A は偽である
$A \wedge B$	「A かつ B」	A と B の両方が真である
$A \vee B$	「A または B」	A と B の少なくとも一つが真である
$A \Rightarrow B$	「A ならば B」	A が真のときは必ず B も真である

練習問題 1. 次を命題論理式とそうでないものに分けよ.

- P
- P, Q
- $P \Leftrightarrow Q$
- $(R \Rightarrow Q) \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$ □

練習問題 2. P を「休講である」，Q を「休講掲示が出ている」，R を「大学に来ている」とする．このとき，以下の日本語を命題論理式に直し，命題論理式を日本語に直せ.

- 大学に来ない
- 休講ではないが，大学には来ない
- $P \wedge Q$
- $Q \Rightarrow (P \wedge \neg R)$
- 大学に来ているときは休講掲示が出ていない □

記法　命題論理式の括弧を以下のように省略する．まず，$\Rightarrow$ は右結合であるとする．すなわち，$A \Rightarrow B \Rightarrow C$ は，$A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$ を表すとする．単項演算子の連続は括弧を省略する．すなわち，$\neg\neg A$ は $\neg(\neg A)$ を表す．また，$\vee$ と $\wedge$ は結合的であるため，括弧を省略し $A \vee B \vee C$ や $A \wedge B \wedge C$ と書くことがある．演算子の結合の強さは

$$\neg \quad > \quad \vee, \wedge \quad > \quad \Rightarrow$$

の順とする．よって，$\neg P \vee Q$ は $(\neg P) \vee Q$ を表すし，$\neg A \Rightarrow B \vee C$ は $(\neg A) \Rightarrow (B \vee C)$ を表す．逆に $A \wedge (B \vee C)$，$(A \wedge B) \vee C$，$\neg(A \vee C)$ や $A \wedge (B \Rightarrow C)$ の括弧を省略することはできない．文献によっては，$\times$ と $+$ との類推から，$\wedge$ を $\vee$ よりも結合の強い演算子として扱うこともあるが，本講義では採用しない．また，$\Rightarrow$ を $\rightarrow$ や $\supset$ と書くこともあるが，本講義では採用しない．

練習問題 3. 次の命題論理式に対し，括弧が正しく省略されているかどうかを判断し，省略されている場合は補え．

- $P \vee Q \wedge R$
- $P \vee Q \Rightarrow R \Rightarrow P$
- $P \Rightarrow Q \vee \neg R$
- $\neg\neg P \Rightarrow \neg Q \vee R$ □

1.2　命題論理式の解釈

定義 (付値)**.** 命題変数の集合から真偽値の集合 $\{\mathrm{T}, \mathrm{F}\}$ への関数を**付値**（valuation）と呼ぶ． □

定義 (命題論理式の解釈)**.** 付値 v が与えられたとき, v の元での命題論理式 A の**解釈**（interpretation）$[\![A]\!]_v$ を以下のように定義する．

$$\begin{aligned}
[\![P]\!]_v &= v(P) \\
[\![\neg A]\!]_v &= \begin{cases} \mathrm{T} & \text{if } [\![A]\!]_v = \mathrm{F} \\ \mathrm{F} & \text{if } [\![A]\!]_v = \mathrm{T} \end{cases} \\
[\![A \wedge B]\!]_v &= \begin{cases} \mathrm{T} & \text{if } [\![A]\!]_v = [\![B]\!]_v = \mathrm{T} \\ \mathrm{F} & \text{otherwise} \end{cases} \\
[\![A \vee B]\!]_v &= \begin{cases} \mathrm{F} & \text{if } [\![A]\!]_v = [\![B]\!]_v = \mathrm{F} \\ \mathrm{T} & \text{otherwise} \end{cases} \\
[\![A \Rightarrow B]\!]_v &= \begin{cases} \mathrm{F} & \text{if } [\![A]\!]_v = \mathrm{T} \text{ and } [\![B]\!]_v = \mathrm{F} \\ \mathrm{T} & \text{otherwise.} \end{cases}
\end{aligned}$$

□

練習問題 4. 付値 v_0 を以下で定義する．

$$\begin{aligned}
v_0(P) &= \mathrm{T} \\
v_0(Q) &= \mathrm{F} \\
v_0(R) &= \mathrm{T}
\end{aligned}$$

このとき，以下の命題論理式に対し，その v_0 の元での解釈を求めよ．

- $P \lor Q$
- $P \land Q$
- $P \lor Q \Rightarrow R$ □

練習問題 5. 付値 v に対し，$[\![P \lor Q]\!]_v = [\![\neg P]\!]_v = \mathrm{T}$ となったとする．このとき，$v(P)$ および $v(Q)$ を求めよ． □

定義 (モデル)**.** 命題論理式 A が付値 v に対し $[\![A]\!]_v = \mathrm{T}$ となるとき，v を A の**モデル**（model）と呼び，$v \models A$ と書く．また，v が A のモデルではないとき $v \not\models A$ と書く．

定義 (恒真)**.** 命題論理式 A が，任意の付値 v に対し $v \models A$ となるとき，A を**恒真**（tautology）であるという． □

定義 (充足可能)**.** 命題論理式 A に対し，$v \models A$ となる v が存在するとき A を**充足可能**（satisfiable）という． □

充足可能でないことを，充足不能ということもある．

定理. $\neg A$ が充足不能ならば，そのときに限り A が恒真.

証明. **（そのときに限り）** A が恒真だとする．このとき任意の付値 v に対し v，$[\![A]\!]_v = \mathrm{T}$．よって解釈の定義から，任意の付値 v について $[\![\neg A]\!]_v = \mathrm{F}$．よって，$[\![\neg A]\!]_v = \mathrm{T}$ となる付値 v は存在しない．つまり，$\neg A$ は充足不能である．

（ならば） $\neg A$ が充足不能であるとする．つまり，任意の付値 v に対し $[\![\neg A]\!]_v = \mathrm{F}$ となる．よって解釈の定義から，任意の付値 v について $[\![A]\!]_v = \mathrm{T}$．よって，A は恒真. □

練習問題 6. 次の命題論理式が恒真かどうか判断せよ．恒真であるときはそれを証明し，恒真でないときはその論理式 A に対し $v \not\models A$ となる付値 v を示せ．

- $P \Rightarrow Q$
- $P \Rightarrow P$
- $\neg P \lor P$
- $\neg P \land P$
- $P \land Q \Rightarrow P$
- $P \lor Q \Rightarrow P$
- $P \Rightarrow P \lor Q$
- $P \lor Q \Rightarrow (P \Rightarrow R) \Rightarrow (Q \Rightarrow R) \Rightarrow R$
- $P \land Q \Rightarrow (P \Rightarrow Q \Rightarrow R) \Rightarrow R$
- $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$
- $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$
- $\neg\neg P \Rightarrow P$
- $P \Rightarrow \neg\neg P$
- $Q \Rightarrow (P \Rightarrow Q)$ □

練習問題 7. ある島の住人はとても変わっており，男は昼は必ず真，夜は必ず偽であることを言い，逆に女は昼は必ず偽，夜は必ず真であることをいう．あなたは島の洞窟を探検中に,「私は男である」と主張する住人と遭遇した．洞窟は薄暗く，住人が男か女か，昼か夜かわからないとする．住人の主張から何がわかるか．

- P を「この住人が男である」，Q を「今は昼である」とすると，「私は男である」という主張は $((P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \Rightarrow P) \wedge (P \Rightarrow ((P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)))$ と書ける．この論理式を A と置く．A のモデルを全てもとめよ．（ヒント：P の真偽で場合分けする）
- A の全てのモデルで真となる論理式を挙げよ．

また，別の日に島の洞窟を探検中に,「今は昼である」と主張する住人と遭遇した．同様に主張から何がわかるか議論せよ．□