情報論理学 2016 年第 11 週分ハンドアウト

担当：松田一孝

8.1 ∃に関する規則

∃は∀とは対照的に導入則は簡単である．

$$\dfrac{\Gamma \vdash A[t/x]}{\Gamma \vdash \exists x.A}\,(\exists\mathrm{I})$$

つまり，具体的なものをいつでも∃に抽象化してよいということである．注意点としては，全ての t を一度に抽象化する必要がないということである．たとえば，今 $P(c,c)$ が証明できたとしよう．そのとき，

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Gamma \vdash P(c,c)}}{\Gamma \vdash \exists x.P(x,c)}\,(\exists\mathrm{I})$$

としてもよい．実際に証明を行う際には証明木（証明に関する導出木）は下から構築していくことが多いだろうから，むしろ∀の除去のほうが「どこを一般化するか」ということが悩ましいかもしれない．

∃の除去則はすこし注意が必要だ．

$$\dfrac{\Gamma \vdash \exists x.A \quad \Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash B}\,(\exists\mathrm{E}) \qquad (x \notin \mathrm{FV}(B) \cup \mathrm{FV}(\Gamma))$$

つまり，$\exists x.A$ が成り立つとき，x に対して A が成り立つことを仮定して B を示すことができれば，B がいえる．ただし，B に x が残っていてはいけないし，Γ に x に自由に出現していると，x に対して A 以外のことも仮定していることになるからこれも禁じなければばならない．

上記で，$\Gamma, A \vdash B$ の部分は，実質的に $\Gamma \vdash \forall x.A \Rightarrow B$ であることに気付いた人もいるのかもしれない．実際に以下が成り立つ．

定理 8.1. $x \notin \mathrm{FV}(\Gamma)$ とする．このとき，$\Gamma \vdash \exists x.A$ が導出可能であれば，そのときに限り，任意の $x \notin B$ であるような B について $\Gamma \vdash (\forall x.A \Rightarrow B) \Rightarrow B$ が導出可能である．

証明. **（ならば）**$\Gamma \vdash \exists x.A$ が導出可能だと仮定する．あとは，以下の導出による．

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Gamma, \forall x.A \Rightarrow B \vdash \exists x.A}\,\text{仮定} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, \forall x.A \Rightarrow B, A \vdash \forall x.A \Rightarrow B}\,(\mathrm{Ax})}{\Gamma, \forall x.A \Rightarrow B, A \vdash A \Rightarrow B}\,(\forall\mathrm{E}) \quad \dfrac{}{\Gamma, \forall x.A \Rightarrow B, A \vdash A}\,(\mathrm{Ax})}{\Gamma, \forall x.A \Rightarrow B, A \vdash B}\,(\Rightarrow\mathrm{E})}{\Gamma, \forall x.A \Rightarrow B \vdash B}\,(\exists\mathrm{E})}{\Gamma \vdash (\forall x.A \Rightarrow B) \Rightarrow B}\,(\Rightarrow\mathrm{I})$$

（そのときに限り）B として，$\exists x.A$ を選ぶ．$\Gamma \vdash (\forall x.A \Rightarrow (\exists x.A)) \Rightarrow (\exists x.A)$ が導出可能であると仮定する．あとは以下の導出による．

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Gamma \vdash (\forall x.A \Rightarrow (\exists x.A)) \Rightarrow (\exists x.A)}\,\text{仮定} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma, A \vdash A}\,(\mathrm{Ax})}{\Gamma, A \vdash (\exists x.A)}\,(\exists\mathrm{I})}{\Gamma \vdash A \Rightarrow (\exists x.A)}\,(\Rightarrow\mathrm{I})}{\Gamma \vdash \forall x.A \Rightarrow (\exists x.A)}\,(\forall\mathrm{I})}{\Gamma \vdash \exists x.A}\,(\Rightarrow\mathrm{E})$$

□

上記の定理が成り立つからといって，$(\forall x.P(x) \Rightarrow Q) \Rightarrow Q$ と $\exists x.P(x)$ がお互いをお互いから証明できるということはない．そのそもこの二者は論理的同値ではない．ただし，前者が妥当なら後者も妥当だし，その逆も成り立つ．なお命題や述語を量化することを許す二階論理では，$\exists x.A$ と $\forall Q.(\forall x.A \Rightarrow Q) \Rightarrow Q$ は同値となる．

練習問題 8.1. 以下を導出せよ．

$$\begin{gathered}
\exists x.\exists y.P(x,y) \vdash \exists y.\exists x.P(x,y) \\
\exists x.P(x) \land Q(x) \vdash (\exists x.P(x)) \land (\exists x.Q(x)) \\
\exists x.P(x) \lor Q(x) \vdash (\exists x.P(x)) \lor (\exists x.Q(x)) \\
(\exists x.P(x)) \lor (\exists x.P(x)) \vdash \exists x.P(x) \lor Q(x) \\
(\exists x.P(x)) \land Q \vdash \exists x.P(x) \lor Q \\
\exists z.P(z,z) \vdash \exists x.\exists y.P(x,y) \\
\exists x.P(x) \vdash \exists x.\exists y.(P(x) \land P(y)) \\
\exists x.\exists y.P(f(x,y)) \vdash \exists z.P(z)
\end{gathered}$$

練習問題 8.2. 以下を導出せよ．

$$\forall x.P(x) \Rightarrow Q \vdash (\exists x.P(x)) \Rightarrow Q \qquad \exists x.P(x) \Rightarrow Q \vdash (\forall x.P(x)) \Rightarrow Q$$

練習問題 8.3. 以下を導出せよ．

$$\begin{gathered}
\neg(\exists x.P(x)) \vdash \forall x.\neg P(x) \qquad \forall x.\neg P(x) \vdash \neg(\exists x.P(x)) \\
\neg(\forall x.P(x)) \vdash \exists x.\neg P(x) \qquad \exists x.\neg P(x) \vdash \neg(\forall x.P(x))
\end{gathered}$$

なお，一部の証明には (PbC) を使用しなければならない．

練習問題 8.4. 以下を導出せよ．

$$\vdash \exists x.P(x) \Rightarrow (\forall y.P(y))$$

練習問題 8.5. 以下を導出せよ．

$$\vdash \neg(\forall x.(\neg S(x,x) \Rightarrow S(c,x)) \land (S(x,x) \Rightarrow \neg S(c,x)))$$

9 健全性と完全性

以下の定理が成り立つことが知られている．

定理 9.1 (健全性)**.** $\Gamma \vdash A$ が導出可能ならば $\Gamma \models A$. □

定理 9.2 (完全性)**.** $\Gamma \models A$ ならば，$\Gamma \vdash A$ が導出可能. □

前者は導出木に関する帰納法で比較的簡単に証明できる．後者は「Gödel の完全性定理」として知られる．

系 9.1. 任意の命題論理式 A は，自然演繹において A が証明可能か，$[\![A]\!]_{M,\theta} = \mathrm{F}$ なる M, θ を持つ． □

意味論は論理式 A が妥当でない（すなわち，健全性・完全性より証明可能でない）ことを示すのに便利である．A が妥当でないことを言うには $[\![A]\!]_{M,\theta} = \mathrm{F}$ となる M, θ を**一つ**示せばよい．一方，証明論は論理式 A が証明可能である（すなわち，健全性・完全性より妥当である）ことを示すのに便利である．A が証明可能であることを言うのには，$\vdash A$ の導出を**一つ**示せばよい．

なお，議論領域として無限のものを考えなければならないことがあることに注意する．たとえば，

$$\begin{pmatrix} (\forall x.P(x,x)) \\ \wedge\ (\forall x.\forall y.\forall z.P(x,y) \Rightarrow P(y,z) \Rightarrow P(x,z)) \\ \wedge\ (\forall x.\forall y.P(x,y) \vee P(y,x)) \end{pmatrix} \Rightarrow (\exists x.\forall y.P(x,y))$$

という論理式の反証モデルは有限でない．$M = (D, I)$ が反証モデルだとしよう．すると，$I(P)$ は D 上の前順序関係になり，$d \sim d'$ を $(d, d') \in I(P)$ かつ $(d', d) \in I(P)$ と定義すると，$I(P)$ は $D/\sim$ 上の全順序になる．とすると，D が有限があれば $D/\sim$ も有限であり，最小元 $[d_0]_\sim$ が取れてしまうので，それを x として選べば $\exists x.\forall y.P(x,y)$ が真となる．

試験範囲ここまで