情報論理学 2016 年第 10 週分ハンドアウト

担当：松田一孝

8　述語論理の証明論

さて，これまでは述語論理の意味論を扱ってきた．具体的には，論理式が「何を意味するか」を与え，それ基づき妥当な（valid）論理式とは何かを議論してきた．命題論理ときから繰り返しになるが，これから説明する証明論では，証明そのものを形式化する．また，証明論では論理式は何かを表すものではなくただの記号からなる木（抽象構文木）として扱われる．

本講義では，命題論理のときに学んだ**自然演繹**を紹介する．繰り返しになるが，自然演繹での「証明」は我々が日常的に行う通常の数学の証明と類似している．証明の形式的な取扱いを学ぶことにより，通常の数学における証明についての理解を深めることもこの講義の目的の一つである．

命題論理に対する自然演繹と，述語論理に対する自然演繹法の差分は大きくはない．$\forall$ と $\exists$ のそれぞれに関する導入則と除去則，計 4 つの推論規則が追加されたに過ぎない．しかしながら，自由変数に関する付帯条件（side condition）を伴うものもあり，注意が必要だ．

命題論理のときと同じく，述語論理の自然演繹における判断も $\Gamma \vdash A$ の形をしている．この判断は，直感的には「仮定 Γ の下で A が成り立つ」ことを表している．命題論理の自然演繹の推論規則は全て，述語論理の推論規則である．それらについては（配布資料では）改めて説明はしない．

8.1　$\forall$ に関する規則

$\forall$ の除去則は簡単である．

$$\frac{\Gamma \vdash \forall x.A}{\Gamma \vdash A[t/x]}\,(\forall\mathrm{E})$$

もちろん，t の自由変数が置き換えによって束縛されてしまわないように適切に名前換えをすることが必要になる．

$\forall$ の導入則は注意が必要だ．

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash \forall x.A}\,(\forall\mathrm{I}) \qquad (x \notin \mathrm{FV}(\Gamma))$$

ここで，$x \notin \mathrm{FV}(\Gamma)$ は付帯条件と呼ばれるものであり，規則が付帯条件が満たされたときにしか使ってはならない．たとえば，

$$\frac{P(x) \vdash Q(x)}{P(x) \vdash \forall x.Q(x)}\,(\forall\mathrm{I})$$

としてはいけない．

例 8.1. $(\forall x.P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow (\forall y.P(y)) \Rightarrow (\forall z.P(z))$ は以下のようにして証明できる．

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash \forall x.P(x) \Rightarrow Q(x)}\,(\mathrm{Ax})}{\Gamma \vdash P(z) \Rightarrow Q(z)}\,(\forall\mathrm{E}) \quad \dfrac{\dfrac{}{\Gamma \vdash \forall y.P(y)}\,(\mathrm{Ax})}{\Gamma \vdash P(z)}\,(\forall\mathrm{E})}{\Gamma \vdash P(z)}\,(\Rightarrow\mathrm{E})}{\Gamma \vdash \forall z.P(z)}\,(\forall\mathrm{I})}{(\forall x.P(x) \Rightarrow Q(x)) \vdash (\forall y.P(y)) \Rightarrow (\forall z.P(z))}\,(\Rightarrow\mathrm{I})}{\vdash (\forall x.P(x) \Rightarrow Q(x)) \Rightarrow (\forall y.P(y)) \Rightarrow (\forall z.P(z))}\,(\Rightarrow\mathrm{I})$$

ここで，$\Gamma = (\forall x.P(x) \Rightarrow Q(x)), (\forall y.P(y))$．$z \notin \mathrm{FV}(\Gamma)$ であったことを確認してほしい．　□

練習問題 8.1. 以下を導出せよ.

$$\forall x.\forall y.P(x,y) \vdash \forall y.\forall x.P(x,y)$$
$$\forall x.P(x) \land Q(x) \vdash (\forall x.P(x)) \land (\forall x.Q(x))$$
$$(\forall x.P(x)) \lor (\forall x.P(x)) \vdash \forall x.P(x) \lor Q(x)$$
$$(\forall x.P(x)), (\forall x.Q(x)) \vdash \forall x.P(x) \land Q(x)$$
$$(\forall x.P(x)) \lor Q \vdash \forall x.P(x) \lor Q$$
$$\forall x.\forall y.P(x,y) \vdash \forall z.P(z,z)$$
$$\forall x.P(x) \vdash \forall x.\forall y.(P(x) \land P(y))$$
$$\forall x.P(x) \vdash \forall x.\forall y.(P(f(x,y)))$$

練習問題 8.2. 論理式

$$((\forall y.P(y)) \Rightarrow Q(w)) \land P(w) \Rightarrow (\forall z.Q(z))$$

を考える．この式が妥当でないことを示せ．また，付帯条件を無視して規則 ($\forall$I) を用いてしまうとこの式が証明できてしまうことを確認せよ.

練習問題 8.3. ところで，前述の論理式とよく似た

$$(\forall w.((\forall y.P(y)) \Rightarrow Q(w)) \land P(w)) \Rightarrow (\forall z.Q(z))$$

は妥当であるし，証明できる．ともに示してみよ. □

練習問題 8.4.

$$\vdash \neg((\forall x.S(c,x) \Rightarrow \neg S(x,x)) \land (\forall x.S(x,x) \Rightarrow \neg S(c,x)))$$

を導出せよ. □