情報論理学（2016, 松田担当分）

レポート課題（中間試験相当）

締切（厳守）：2016年5月31日 12:00 (JST)

提出方法: (p)LaTeX もしくは Word （あるいは Pages や LibreOffice Writer など類似オフィスソフト）を用いて PDF を作成し，“`Logic_Report_2016: <STUDENT_ID>`” という題目の email に添付し，下記メールアドレスに送信.

`kztk@ecei.tohoku.ac.jp`

`<STUDENT_ID>`の部分は各自の学籍番号にて置き換えること．なお，**レポートにも名前と学籍番号を含める**こと．また，場合によってはソースコード一式やビルド方法の記述も同様に添付すること．
手書きのレポートはスキャンであれ受けとらない.

採点方法: 大問は 4 つあり，それぞれ最大点数が決まっている．具体的には，s_i を大問 i の点数とすると

$$\min(\min(s_1, 35) + \min(s_2, 40) + \min(s_3, 20) + \min(s_4, 30), 100)$$

が本レポートの点数となる．つまり解く問題をある程度選ぶことができるし，最大点数分よりも多くの問題を解くことで保険を掛けることもできるということである.

I.　命題論理の意味論に関する以下の問に答えよ．**（最大 35 点）**

(1)　解釈の定義に従い，以下の各命題論理式が恒真かどうかを判定し，その根拠を示せ．なお，真偽値表はそれが解釈の定義に従い何を表しているのかの説明がなければ用いてはならない．**（各 5 点）**

1. $P \Rightarrow Q \vee P$
2. $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$
3. $(P \vee Q) \wedge \neg P \Rightarrow Q$
4. $(P \vee Q) \wedge P \Rightarrow \neg Q$

(2)　同値変形を用いて以下の各命題論理式が恒真であることを示せ．なお，変形の各ステップ毎にどの規則を用いたかを明示せよ．使用してよい規則とその規則の名前は講義で紹介したものを用いることとする．**（各 5 点）**

1. $P \wedge Q \Rightarrow P$
2. $P \Rightarrow P \vee Q$
3. $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow P) \Rightarrow P$
4. $(P \wedge Q) \Rightarrow (P \Rightarrow Q \Rightarrow R) \Rightarrow R$

II.　命題論理の証明論に関する以下の問に答えよ．**（最大 40 点）**

(1)　以下を導出せよ．**（各 10 点）**

1. $\top \Rightarrow P \vdash P$

2. $P \vee Q \vdash \neg P \Rightarrow Q$

3. $P \wedge (Q \vee R) \vdash (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

4. $P \Rightarrow \neg P, \neg P \Rightarrow P \vdash P$

5. $\vdash ((P \Rightarrow Q) \Rightarrow P) \Rightarrow P$

ヒント：$\vdash ((P \Rightarrow Q) \Rightarrow P) \Rightarrow P$ の導出には背理法を使う必要がある．

(2) 任意の論理式 A に対し，$\vdash \neg\neg A$ が導出可能ならば，$\vdash A$ が導出可能であることを示せ．ここで，任意の論理式 A に対し，$\vdash A$ が導出ならば $\Gamma \vdash A$ も導出可能であることを用いてもよい．なお，問われていることは $\neg\neg A \vdash A$ の導出ではないことに注意する． **（10 点）**

III.　あなたは極東にあるという不思議な島をおとずれた．噂によれば，この島には不死の薬があるいう．一節にはとある山の頂上で焼かれて燃やされたと聞くが真偽のほどはわからない．

この島の住民は武士か忍者かに分けられる．武士はいつでも真となることを言い，忍者はいつでも偽となることを言う．島の住人ではないあなたには武士と忍者を外見から見分けることは難しいが，島の住民は誰が武士で誰が忍者であるかを知っている．

以後，簡便のため $A \Leftrightarrow B$ を $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$ の略記として用いる．ここで任意の付値 v について，もし $[\![A \Leftrightarrow B]\!]_v = \mathrm{T}$ ならば $[\![A]\!]_v = [\![B]\!]_v$ であり，もし $[\![A \Leftrightarrow B]\!]_v = \mathrm{F}$ ならば $[\![A]\!]_v \neq [\![B]\!]_v$ であることに注意する．なお，「ある人が P という主張をしたこと」は，その人が武士であることを表す命題を M とすると，$M \Leftrightarrow B$ と表すことができることに注意する．このとき，以下の問に答えよ． **（最大 20 点）**

(1)　ある日，あなたは二人の島の住民である太郎と次郎に会った．彼等は曰く．

太郎「次郎と私はともに武士であり，不死の薬はこの島にある」
次郎「太郎は嘘つきだ」

1. 「太郎が武士である」という命題を M,「次郎が武士である」という命題を N と置き,「不死の薬がこの島にある」という命題を F と置く．このとき，上記の発言を彼等が主張したことを表す命題論理式を求めよ． **（10 点）**

2. 不死の薬がこの島にあるか否か，あるいは分からないか．また，太郎と次郎はそれぞれ武士か忍者かあるいは分からないか．前の問で求めた論理式のモデルを考えることにより答えよ． **（5 点）**

(2) また別の日，あなたは一人の島の住民に会った．その人曰く．

「私が武士であるならば不死の薬はまだこの島にあるし，不死の薬がこの島にあったならば私が武士であったということだ」

1. 「彼が武士である」という命題を M と置き,「不死の薬がこの島にある」という命題を F と置く．このとき，上記の発言を彼が主張することを表す命題論理式を求めよ． **（10 点）**

2. 彼は武士か否か，またこの島には不死の薬があるか否か．あるいは，これらは今の発言だけからは分からないか．前の問で求めた論理式のモデルを考えることにより答えよ． **（5 点）**

IV. 以下のプログラミング課題を解け **（最大 30 点）**.

なお，使用言語は採点の都合上 C, C++, Java, SML, OCaml, Haskell, Python, Ruby, Prolog, Curry に限定する．なお，採点に使用する PC は標準的な Unix 環境であり，Visual C や Eclipse 等の IDE はインストールされていない．

ソースコード一式にビルド方法を含めたものをレポート PDF とは別に提出物に含めることにし，実装方針，実行例，工夫点をレポートに記すこと．また，ビルド方法には動作の確認に使用した環境や，処理系のバージョンを記すこと．要求を満たす範囲で最小の努力で済むようにしたことも立派な工夫点である．

(1) 命題論理式が与えられたときに，それが恒真か否かを判定するプログラムを書け．なお，入力の与えかたは特には指定しない．標準入力から読むのでもよいし，引数から受けとるのでもよい．あるいはプログラム中で `new And(new PropVar("P"), new PropVar ("Q"))` のように式として与える形でもよい．ナイーブな全探索でない解答には追加で加点される場合がある． **（15+5 点）**

(2) SAT ソルバを使うと，和積標準形（conjunctive normal-form，以下 CNF）の命題論理式が充足可能かどうか判定でき，充足可能な場合（つまりモデルが存在する場合）はそらにその論理式の具体的なモデルを得ることができる．ここで，和積標準形とは，$(P \vee Q \vee \neg R) \wedge (P \vee \neg Q)$ のような，命題変数と命題変数の否定からなる選言の連言の形で表わされる命題論理式である．なお，$P \vee Q$ や $\neg P$ も CNF であることに注意する．

SAT ソルバを用いて数独の問題を問いてみよう．P_{ijk} を i 行 j 列目のセルに数 k が入ることを表す命題変数だとしよう（$1 \leq i, j, k \leq 9$）．数独が解を持つことに関する制約を CNF の形で与えてみよう．たとえば，各セルには 1 から 9 までの何れかの数が入らなければならないことを表す CNF は

$$\bigwedge_{\substack{1\leq i\leq 9\\ 1\leq j\leq 9}} \bigvee_{1\leq k\leq 9} P_{ijk}$$

となる．

1. 上記の条件だけだと，各セルに複数の数が入ることを許してしまう．各セルには二つ数が入ってならないことを表す CNF を求めよ．（ヒント：相異なる k と k' について P_{ijk} と $P_{ijk'}$ が共に真になってはいけない） **（5 点）**
2. 各行には，同じ数の入ったセルがあってはならない．このことを表す CNF を求めよ．（ヒント：相異なる j と j' について P_{ijk} と $P_{ij'k}$ が共に真になってはいけない） **（5 点）**
3. 各列には，同じ数の入ったセルがあってはならない．このことを表す CNF を求めよ． **（5 点）**
4. 数独には 3×3 のブロックが 9 つあり，それらの各ブロックについても同じ数のはいったセルがあってはいけない．このことを表す CNF を求めよ． **（5 点）**
5. 数独の問題には予め数が埋められたセルが存在する．これを CNF で表現するためにはどうすればよいか． **（5 点）**
6. 以上により得られた CNF の連言をとることにより，その命題論理式が充足可能であるならば，そのときに限り数独の問題に解が存在するような CNF が得られる．上記を踏まえて，数独を SAT ソルバを用いて解くプログラムを作成せよ．数独の問題を SAT ソルバの入力へと変換するプログラムと，SAT ソルバの出力を数独の問題の解に変換するプログラムを作成したのでよい．SAT ソルバとしては，例えば MiniSat（`http://minisat.se/`）がある． **（5 点）**

(3) 自然演繹に基づくドミノゲーム「Dominoes on Acid」（`http://www.winterdrache.de/freeware/domino/`）をプレイせよ．

1. 5 問を適当に選び（ただしそのうち 1 問は 30 問目以降から選ぶこと）解け．その解答の証拠としてスクリーンショットを提出せよ． **（5 点）**

2. また，それらの解答にそれぞれついて，「Show Proof」ボタンもしくはメニューの「File」→「Show Proof」から得られる証明木を，本講義で紹介したような仮定を陽に扱う形へと直せ． **（5 点）**